

ACUSTICA

Vol. 4

1954

No. 4

SUR LA TRANSMISSION DU SON PAR DES HUBLOTS SPHÉRIQUES

par A. BERGASSOLI, F. CANAC et TH. VOGEL

Centre National de la Recherche Scientifique, C.R.S.I.M., Marseille

Sommaire

On rend compte de mesures de transparence acoustique faites sur des hublots fermés par des calottes sphériques de différentes courbures. Par rapport au disque plan, il y a une nette amélioration de l'isolement, mais aux graves seulement. Ce résultat est expliqué par l'étude de la répartition des fréquences propres d'une calotte vibrant en extension.

Zusammenfassung

Es wird über die Messung der Schallisolation von Kugelschalen verschiedener Krümmung berichtet, die bei tiefen Frequenzen eine Verbesserung der Schallisolation gegenüber ebenen Platten ergeben. Das Ergebnis wird durch eine Betrachtung der Verteilung der Eigenschwingungen der Kugelschale (bei Dehnenschwingungen) erklärt.

Summary

The acoustical insulation of spherical shells has been found to be appreciably greater than that of plane discs in the lower frequency range. This result is accounted for in a theoretical discussion of the natural frequencies of the shell, under the assumption of extensional vibrations.

Introduction

Les qualités bien connues des calottes sphériques élastiques en ce qui concerne leur résistance à la déformation statique avaient conduit en 1939 M. L. LUMIÈRE à proposer [1] la fabrication de miroirs sphériques en plexiglas : ceux-ci, reposant par leur bord sur un cercle métallique parfaitement rigide, étaient pratiquement indéformables. Des réalisations furent faites par l'un de nous en collaboration avec M. LUMIÈRE, et permirent de montrer qu'on pouvait, à condition de ne pas se montrer trop exigeant, remplacer le verre par de la matière plastique.

L'un de nous ayant pensé que ce procédé pouvait être intéressant pour obtenir des parois rigides quoique très légères, ne vibrant pas sous l'effet des ondes sonores, nous demandâmes à M. LUMIÈRE de nous prêter un de ses miroirs (celui désigné plus bas par le sigle L) ; les premiers résultats furent encourageants. Des essais faits par la suite sur des calottes métalliques montrèrent l'influence capitale de la fixation du contour : la partie sphérique avait, en effet, été emboutie dans un panneau plan plus étendu, que l'on fixait le long de ses bords et qui vibrat lui-même, d'où pour la calotte des conditions au contour difficiles à préciser, et d'ailleurs peu favorables.

On a repris récemment ces mesures en serrant soigneusement la partie plane entre des mâ-

choires circulaires rigides : les résultats en ont paru suffisamment intéressants pour mériter un bref compte-rendu.

I. Description des expériences

Les mesures ont porté sur quatre calottes, dont trois en aluminium et une en plexiglas, ayant toutes un contour circulaire de 27 cm de rayon, mais des courbures différentes. Les premières ont été réalisées par martelage sur un moule creux en ciment, et présentent des irrégularités de courbure inférieures à 4% ; la dernière a été moulée à chaud et est d'une belle régularité, mais porte au pôle un trou de 1 mm environ de diamètre. Le Tableau suivant indique leurs caractéristiques principales.

Tableau I

Calotte n°	Matière	Épaisseur $2h$ en mm	Rayon de courbure r en cm	Rayon du contour a en cm	Demi-ouverture θ_0 en degrés
A	Aluminium	1	35	27	51
B	Aluminium	1	42	27	40
C	Aluminium	1	84	27	19
L	Plexiglas	2	79	27	20

Serrés, comme il a été dit, sur leur contour entre des plaques suffisamment rigides pour qu'on puisse considérer comme immobiles les points du petit cercle de rayon a , et comme négligeable la transparence de la partie plane, les hublots étaient fixés dans la baie de mesures qui sépare

la grande salle sans écho du laboratoire d'une petite arrière-salle sourde; une source d'ondes planes de fréquence continuement variable et de niveau constant irradiait la baie sous incidence normale, et le son parvenu dans la chambre sourde, capté par un microphone, commandait un enregistreur de niveau Brüel et Kjær à sensibilité logarithmique, dont le déroulement était asservi à la fréquence de la source.

Une courbe de réponse analogue était ensuite obtenue, la calotte sphérique étant remplacée par un panneau plan de mêmes caractéristiques élastiques, semblablement serré: la comparaison, abscisse pour abscisse, des deux courbes a permis de tracer les caractéristiques des Fig. 1 a-d, qui mettent en lumière l'influence de la sphéricité du hublot sur son isolement acoustique.

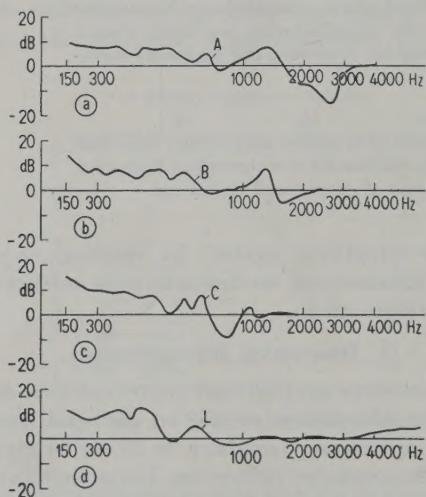


Fig. 1. (a) Isolement acoustique du hublot sphérique A rapporté à celui du hublot plan correspondant.
(b) Isolement acoustique du hublot sphérique B rapporté à celui du hublot plan correspondant.
(c) Isolement acoustique du hublot sphérique C rapporté à celui du hublot plan correspondant.
(d) Isolement acoustique du hublot sphérique L rapporté à celui du hublot plan correspondant.

On constate en gros une amélioration d'isolement aux graves, de l'ordre de 15 dB, se maintenant encore entre 5 et 10 dB jusque vers 1000 Hz, et suivie d'une détérioration aux aiguës, d'autant plus faible que le rayon de courbure est plus grand, en ce qui concerne les calottes A, B, C; la calotte L se comporte de manière analogue jusque vers 500 Hz, est sensiblement équivalente au panneau plan entre 500 et 3000 Hz, pour reprendre quelque avantage (de l'ordre de 5 dB) au delà.

Des expériences complémentaires ont montré que le comportement restait sensiblement le même, que le son arrivât sur la face convexe ou

sur la face concave; et que le serrage réalisé était suffisant pour qu'un plâtrage soigneux du contour n'apportât pas de modification appréciable de l'énergie transmise.

Ces résultats présentent un certain intérêt pratique, du fait que ce sont précisément les sons graves qu'il est le plus difficile de combattre, et qui, une fois les parois de l'enceinte traversées, se laissent le plus difficilement absorber par des revêtements superficiels. D'autre part, leur allure est peu habituelle, de sorte qu'il a paru utile d'en chercher l'explication théorique.

2. Théorie approchée des vibrations d'une calotte sphérique

Les équations générales aux vibrations d'une enveloppe mince de révolution [2] prennent une forme relativement simple lorsqu'il s'agit d'une portion de sphère, et que les déformations peuvent être considérées comme fonctions de la seule colatitude θ . Elles peuvent alors s'écrire:

$$\begin{aligned} T'_1 + (T_1 - T_2) \cot \theta + K k_i^2 u &= KV, \\ KV' + KV \cot \theta + (T_1 + T_2) + K k_i^2 w &= 0, \quad (1) \\ G'_1 + (G_1 - G_2) \cot \theta + Kr V &= 0 \end{aligned}$$

où les inconnues u (déplacement tangentiel), w (déplacement radial), V (cisaillage radial) sont liées aux composantes de la tension par les relations

$$\begin{aligned} T_1 &= K[u' + \sigma u \cot \theta - (1 + \sigma)w], \\ T_2 &= K[\sigma u' + u \cot \theta - (1 + \sigma)w], \\ G_1 &= \frac{D}{r^2}[u' + w'' + \sigma(u + w') \cot \theta], \\ G_2 &= \frac{D}{r^2}[\sigma(u' + w'') + (u + w') \cot \theta] \end{aligned}$$

et où l'on a posé

$$K = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}, \quad D = \frac{Kh^2(1+\sigma)}{3}, \quad k_i^2 = \frac{m r^2 \omega_i^2}{K},$$

E désignant le module de Young, σ le coefficient de Poisson, m la masse de l'enveloppe par unité de surface, et ω_i une pulsation propre.

En dérivant une fois la deuxième équation (1) et en remplaçant les tensions par leurs expressions, les éqs. (1) prennent la forme

$$\begin{aligned} u'' + u' \cot \theta - \frac{u}{\sin^2 \theta} + (1 - \sigma + k_i^2)u &= V + (1 + \sigma)w', \\ (u + w'')'' + (u + w')' \cot \theta - \frac{u + w'}{\sin^2 \theta} + (1 - \sigma)(u + w') &= \\ = \frac{Kr^3}{D} V, \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(1 + \sigma) \left(u'' + u' \cot \theta - \frac{u}{\sin^2 \theta} \right) + (2 + 2\sigma - k_i^2)w' \\ = V'' + V' \cot \theta - \frac{V}{\sin^2 \theta}. \end{aligned}$$

Soit L le symbole de l'opérateur différentiel linéaire

$$\frac{d^2}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{d}{d\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta},$$

et de plus $1 - \sigma + k_i^2 = a$, $2 + 2\sigma - k_i^2 = c$;

le système (2) prend alors la forme

$$\begin{aligned} (L+a)u - V - (1+\sigma)w' &= 0, \\ (L+1-\sigma)u - \frac{Kr^3}{D}V + (L+1-\sigma)w' &= 0, \quad (3) \\ -(1+\sigma)Lu - LV + cw' &= 0 \end{aligned}$$

et l'on voit qu'il est possible d'y satisfaire en prenant u, V, w' proportionnelles à une même quantité et en donnant à la lettre L une valeur numérique qui annule le déterminant de (3), au lieu de la considérer comme représentant un opérateur. Autrement dit, on prendra pour V et w' des expressions telles que Au et Bu , et pour u une solution de l'équation différentielle

$$Lu = \lambda u, \quad (4)$$

en choisissant pour la constante λ une valeur qui vérifie l'équation déterminante

$$\begin{vmatrix} \lambda + a & -1 & -(1+\sigma) \\ \lambda + 1 - \sigma & -Kr^3/D & \lambda + 1 - \sigma \\ -(1+\sigma)\lambda & -\lambda & c \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

On reconnaît, dans (4), l'équation différentielle associée de Legendre du premier ordre ; sa seule solution qui soit régulière au pôle $\theta = 0$ de la calotte est la fonction associée de première espèce

$$u = P_\nu^1(\cos\theta),$$

dont le degré (non entier) ν est lié à la valeur de la constante λ par la relation

$$\lambda = -\nu(\nu + 1).$$

Il faut encore satisfaire aux conditions aux limites du problème, lesquelles sont

$$u(\theta_0) = 0, \quad w(\theta_0) = 0;$$

pour ce faire, il suffira de prendre pour ν l'un des nombres de la suite $\{\nu_i\}$ définie par l'équation

$$P_{\nu_i}^1(\cos\theta_0) = 0,$$

puis de choisir convenablement la constante d'intégration dans la quadrature qui donne w , soit

$$w = B[P_\nu(\cos\theta) - P_\nu(\cos\theta_0)].$$

Reste l'équation déterminante (5), laquelle lie λ_i , choisi comme ci-dessus, aux k_i encore arbitraires qui figurent dans a et c , et qui est par conséquent l'équation aux valeurs propres de la calotte. Cette équation peut encore s'écrire

$$\begin{vmatrix} Kr^3/D & \lambda + 1 - \sigma & \lambda + 1 - \sigma \\ \lambda & -\lambda(1+\sigma) & c \\ 1 & \sigma + a & -(1+\sigma) \end{vmatrix} = 0;$$

vu la prédominance numérique du facteur Kr^3/D , qui est de l'ordre de $4 \cdot 10^8$ pour les matériaux en question ici, les zéros de ce déterminant sont sensiblement ceux du mineur relatif à Kr^3/D , d'où l'équation approchée

$$(1+\sigma)^2 - c(a+\lambda) = 0$$

soit encore, puisque σ est voisin de $1/3$,

$$k_i^4 + (\lambda_i - 2)k_i^2 - (0,89\lambda_i + 1,77) = 0.$$

On remarquera que cette approximation revient, tout en gardant la forme correcte de u, V, w , à négliger l'énergie de flexion devant celle d'extension pour le calcul des fréquences propres seulement.

Pour chaque valeur de λ_i (donc de ν_i), l'équation bicarrée admet deux racines, sensiblement égales à

$$k_{iI}^2 = \frac{0,89\nu_i(\nu_i+1)-1,77}{\nu_i(\nu_i+1)+2}$$

et

$$k_{iII}^2 = \nu_i(\nu_i+1)+2.$$

Le Tableau II indique les premières valeurs de $\nu_i(\nu_i+1)$ pour différents angles d'ouverture de la calotte.

Tableau II

θ_0	20°	30°	40°	50°
ν_1	10,75	7	5,1	4
$\nu_1(\nu_1+1)$	126	56	31	20

Pour les calottes A, B, C, on a $K = 7 \cdot 10^{10}$; $m = 0,27$; $r = 27 \sin\theta_0$; de sorte que les pulsations propres sont de l'ordre de $10^4 k_i$. Celles du groupe II, qui d'ailleurs croissent régulièrement avec le rang i , sont toutes dans les aiguës, et contribuent peu à la transparence du hublot. Pour le groupe I, on constate que les valeurs des k_i tendent à s'accumuler au voisinage d'une borne supérieure lorsque i croît, et que d'ailleurs cette borne n'est point trop élevée ; la Fig. 2 permet de fixer les idées sur les valeurs numériques, dans le cas des calottes étudiées.

Lorsque la sphéricité de la calotte tend vers 0, a restant constant, toutes ces fréquences tendent

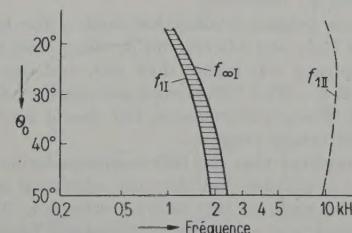


Fig. 2. Répartition des fréquences propres d'un hublot sphérique en aluminium, de 1 mm d'épaisseur, en fonction de l'angle d'ouverture θ_0 .

vers 0, et celles qui se manifestent sont désormais dues aux vibrations de flexion négligées jusqu'alors, mais que l'annulation de θ_0 met en valeur. Les fonctions propres, de leur côté, tendent vers des fonctions de Bessel suivant un mécanisme classique, et l'expression, bien connue, des pulsations propres du disque plat auquel on arrive finalement est

$$\omega_i^* = \sqrt{\frac{D}{m} \frac{i^2}{a^2}}$$

On vérifie que la plus basse d'entre elles est en deçà de la gamme audible dans le cas envisagé, et elles couvrent toute la gamme d'un spectre assez serré, puisque l'écartement entre f_i et f_{i+1} est sensiblement

$$\Delta f_i = \frac{2f_i}{i} = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{D}{2\pi m}} \sqrt{f} \approx 4\sqrt{f}$$

de sorte qu'on en rencontre une tous les 80 Hz au voisinage de $f = 500$ Hz, par exemple.

Si l'on considère que l'énergie transmise par le panneau se présente sous la forme d'une série où chaque terme correspond à une pulsation propre, et est affecté d'un diviseur fonction croissante du désaccord entre cette pulsation et celle de l'onde

excitatrice ; que par suite la plus grande partie de l'énergie transmise est celle due aux termes quasi-résonants pour lesquels le diviseur est très petit [3] ; que de tels termes seront présents à toute fréquence dans le cas du disque plan, mais n'apparaîtront que dans la zone hachurée de la Fig. 2 pour une calotte sphérique, on s'explique fort bien les résultats expérimentaux donnés plus haut.

La théorie approchée que l'on vient d'établir peut également servir de guide dans l'établissement de hublots destinés à une application particulière ; mais si l'on désirait évaluer la transparence avec quelque précision, il faudrait tenir un compte plus exact de la flexion, ce que les équations précédentes permettent d'ailleurs de faire, au prix de quelques complications supplémentaires.

(Reçu le 6 avril 1954.)

Références

- [1] LUMIÈRE, L., Communication privée à F. CANAC.
- [2] LOVE, A. E. H., *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge Univ. Press, 4th ed., 1927; pp. 539 sqq.
- [3] VOGEL, TH., *Vibration d'une plaque métallique dans un champ sonore*. J. Phys. Radium 7 [1946], 193-201.

FIRST MEETING OF ISO/TC 43-ACOUSTICS (MUSICAL PITCH)

On 20th and 21st October 1953 the first meeting of the Technical Committee 43 of the International Organization for Standardization (ISO/TC 43) was held in London. Its most important resolution was the unanimous re-affirmation of the value of 440 c/s for the Standard Tuning Frequency, fixed by the 1939 Conference on Musical Pitch. The standard tuning frequency is the frequency for the note A in the treble stave.

France agreed to this value of 440 c/s (although there were some people, particularly singers, who thought this value too high), on the understanding that it would not be exceeded and that it would be strictly respected by all countries and by all interests.

The German delegation wished to draw a distinction between the standard frequency of 440 c/s and the real pitch of performance. They were in favour of requiring all instruments to be built so that they could be tuned to 440 c/s, but they thought no attempt should be made to control the pitch used by musicians.

The Italian delegation said that by law the standard frequency in Italy was 435 c/s, but in many cases in practice the frequency was higher than this, and was in fact nearer to 440 c/s. The ISO should not specify tolerances for the pitch during performances, but should only fix the frequency for tuning purposes.

It was suggested that the ISO recommendation should be as simple as possible and that any additional information should be given in the national standards. The title of the standard was changed to "Standard Tuning Frequency (Standard Musical Pitch)". There was considerable discussion regarding the accuracy to be prescribed for tuning devices and finally ± 0.5 c/s was adopted,

although instrument manufacturers may find it desirable to use tuning devices having a higher accuracy. The French delegation proposed a reference to a temperature of 20°C but other delegations expressed the view that instruments should be capable of being tuned to the standard frequency of 440 c/s irrespective of the temperature.

With regard to the future programme of work there was considerable discussion on the question whether all the work on acoustics should be dealt with exclusively by either the International Organization for Standardization (ISO) or the International Electro-technical Commission (IEC), or whether the work should be divided between these two organizations and carried out with the closest possible liaison between the two.

Finally a resolution was adopted proposing to the ISO-Council that ISO/TC 43 should conduct work in some purely acoustical fields (1. Acoustical terminology, 2. Threshold of hearing, 3. Architectural acoustics, including a) Sound insulation, and b) Absorption and reverberation, 4. Airborne noise) and that the meetings of ISO/TC 43 and IEC/TC 29 should be held at the same time.

France, Germany, Italy, the Netherlands, Switzerland, the United Kingdom and the United States of America had sent delegates, and observers were present from India, the European Broadcasting Union, the Technical Committee 29 of the International Electro-technical Commission (IEC/TC 29, Electro-acoustics) and the General Secretariat of the ISO. The Director of the British Standards Institute, Mr. BINNEY, welcomed the delegates to British Standards House, and Mr. BROADWOOD and the B.B.C. entertained the delegates in a most delightful manner.

R. VERMEULEN

ÜBER DIE BEWEGUNGSGLEICHUNG UND DEN IMPULSSATZ IN VISOSEN UND KOMPRESSIBLEN MEDIEN

von F. E. BORGNI

California Institute of Technology, Pasadena, Cal., USA.

Zusammenfassung

Die Bewegungsgleichung und der hydrodynamische Impulssatz werden in vektorieller Form aus dem allgemeinen Ausdruck für den Spannungstensor in viskosen Medien unter Einbeziehung der Kompressibilität sowie der Scher- und Volumenviskosität hergeleitet. Es folgen einige Bemerkungen über die Anwendung einer eindimensionalen Betrachtungsweise auf die durch akustische Wellen verursachte Triftströmung in viskosen Medien.

Summary

The equation of motion and the hydrodynamic momentum theorem are derived vectorially from the general expression for the stress tensor in a viscous medium with due consideration of the compressibility and the shear- and bulk-viscosities of the medium. Some remarks are added concerning the use of the one-dimensional specialization of the equations for an explanation of the hydrodynamic flow caused by acoustic waves.

Sommaire

On a établi sous forme vectorielle, à partir de l'expression générale du tenseur des efforts, l'équation du mouvement et le théorème hydrodynamique de l'impulsion pour les milieux visqueux, en tenant compte de la compressibilité ainsi que de la viscosité de cisaillement et de volume. Suivent quelques remarques sur l'emploi d'une méthode unidimensionnelle dans l'étude du courant de déplacement produit dans les milieux visqueux par des ondes acoustiques.

1. Einleitung

Die Wechselbeziehungen zwischen akustischen Vorgängen und turbulenter Bewegung in viskosen Medien gewinnen in letzter Zeit zunehmend an Interesse [1]...[4]. Zur theoretischen Behandlung von Problemen dieser Art benötigt man die Eulerischen Bewegungsgleichungen in allgemeinerer Form als sie gewöhnlich in Lehr- oder Handbüchern zu finden sind. Neben der Scherviskosität, die mit der Formänderungsgeschwindigkeit eines Massenelementes verknüpft ist, spielt hier auch, besonders in Flüssigkeiten, die Volumenviskosität (second-, dilatational- oder bulk-viscosity) eine Rolle, die ein Maß für die viskosen Kräfte bei einer reinen Volumenänderung eines solchen Elementes darstellt. Die durch eine akustische Welle in viskosen Medien erzeugte Triftströmung (Quarzwind, hydrodynamic flow) eröffnet eine Möglichkeit zur experimentellen Bestimmung des Koeffizienten der Volumenviskosität [1], [5].

Ein sehr brauchbares Werkzeug bei der Behandlung der genannten Probleme stellt auch der hydrodynamische Impulssatz dar, den man gewöhnlich nur für nicht viskose Medien hergeleitet findet [6], [7]. Über seine allgemeine Fassung unter Berücksichtigung der viskosen Kräfte und der Kompressibilität finden sich in der gebräuchlichen Literatur nur vereinzelte Hinweise.

Es mag daher nicht überflüssig sein, eine kurze Herleitung der Bewegungsgleichungen und des Impulssatzes in allgemeinerer Form zu geben. Wir werden uns dabei begnügen, die Viskosität als eine Konstante, d. h. von Ort und Dichte unabhängige Größe zu betrachten; eine Erweiterung für variable Viskosität lässt sich unschwer anbringen.

2. Herleitung der allgemeinen Bewegungsgleichung

Der Spannungstensor in Medien mit innerer Reibung besitzt die folgenden Komponenten ([6], S. 92):

$$\begin{aligned} T_{xx} &= -p - \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ T_{yy} &= -p - \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ T_{zz} &= -p - \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \\ T_{xy} = T_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ T_{yz} = T_{zy} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ T_{zx} = T_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right); \end{aligned} \tag{1}$$

$\mathbf{v} (u, v, w)$ ist der Geschwindigkeitsvektor, p der hydrostatische Druck, λ und μ sind Viskositäts-Koeffizienten.

Definitionsgemäß folgt daraus der „mittlere Normaddruck“

$$-\Pi = -\frac{1}{3} (T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}) = p - \left(\frac{2}{3} \mu - \lambda \right) \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (2)$$

Gewöhnlich wird angenommen, daß $-\Pi$ mit dem hydrostatischen Druck p identisch ist und daß dieser nicht von der Expansionsgeschwindigkeit $\operatorname{div} \mathbf{v}$ abhängt. Dies führt zu der bekannten STOKESSEN Relation $\lambda = \frac{2}{3} \mu$. Für einatomige Gase ist diese Beziehung korrekt; für mehratomige Gase sind die Abweichungen davon bei nicht zu kleinen Drucken wahrscheinlich nicht allzu groß. In Flüssigkeiten treten jedoch unter Umständen erhebliche Abweichungen auf. Dies legt die Einführung eines Koeffizienten der Volumenviskosität μ' nahe, der proportional der Volumenänderungsgeschwindigkeit eines Massenelementes gesetzt wird und im Hinblick auf Gl. (2) üblicherweise durch die Beziehung

$$-\Pi = p - \mu' \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (3)$$

definiert wird¹. Damit folgt

$$\lambda = \frac{2}{3} \mu - \mu' \quad \text{oder} \quad 2\mu - \lambda = \frac{4}{3} \mu + \mu'. \quad (4)$$

Die Eulersche Bewegungsgleichung lautet in allgemeinster Form

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} + \operatorname{div} \hat{T}, \quad (5)$$

¹ Das System der Spannungen (1) läßt sich für einatomige Gase aus statistisch-kinetischen Betrachtungen herleiten. Unter der Voraussetzung kleiner Abweichungen von der MAXWELLSchen Verteilung ergibt sich für solche Gase die STOKESSEN Beziehung $\lambda = \frac{2}{3} \mu$, d. h. ein solches einatomiges Gas zeigt keine Volumenviskosität (vgl. auch die historische Bemerkung von G. G. STOKES, Math. phys. Papers 3 [1851], 136). Die erste Herleitung der Spannungen in einem stark verdünnten einatomigen Gas mit ungleichmäßiger Dichte- und Temperaturverteilung findet sich in einer Arbeit von MAXWELL [10], in der die Gasatome als reine Stoßzentren mit einem Kraftwirkungsgesetz r^{-5} angesehen werden. Von J. E. JONES [11] wurden diese Betrachtungen auf Kugeln mit Eigenvolumen und einem r^{-n} -Gesetz erweitert. Die Verhältnisse in dichten Gasen betrachtet Y. ROCARD [12]. Eine kinetische Theorie für mehratomige Gase müßte die Existenz weiterer Freiheitsgrade, d. h. von Anregungszuständen auf quantenmechanischer Grundlage, einbeziehen. Diese Effekte machen das Auftreten von Relaxationserscheinungen und damit einer an zeitabhängige Vorgänge geknüpften Volumenviskosität plausibel. Eine solche gaskinetisch-quantenmechanische Theorie der Viskosität stößt auf erhebliche Schwierigkeiten und liegt bis heute nicht vor. Über die phänomenologische Einbeziehung von Relaxationswirkungen vgl. E. TISZA [13] und M. KOHLER [14]. Eine ausführliche historische Übersicht findet man bei S. CHAPMAN und T. G. COWLING [15].

wobei \mathbf{f} die Resultierende der an der Volumeneinheit angreifenden äußeren Kräfte, ρ die Dichte und $\operatorname{div} \hat{T}$ die Tensordivergenz des durch Gl. (1) beschriebenen Spannungstensors bedeuten. Durch das Symbol $\operatorname{div} \hat{T}$ ist ein Vektor beschrieben, dessen x -Komponente gegeben ist durch

$$(\operatorname{div} \hat{T})_x = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}. \quad (6)$$

Die übrigen Komponenten erhält man daraus durch zyklische Vertauschung.

Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0. \quad (7)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit \mathbf{v} und addiert sie zur linken Seite von Gl. (5), so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \mathbf{v} \operatorname{div} \rho \mathbf{v} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} + \operatorname{div} \hat{T}. \quad (8)$$

Der Vektor $\operatorname{div} \hat{T}$ läßt sich, wie man durch Einsetzen seiner Komponenten aus Gl. (1) in Gl. (6) leicht verifiziert, auf die folgende Form bringen:

$$\operatorname{div} \hat{T} = -\operatorname{grad} p + (\mu - \lambda) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \Delta \mathbf{v}. \quad (9)$$

Benutzt man die Vektoridentität $\Delta \mathbf{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}$, so kann man auch schreiben:

$$\operatorname{div} \hat{T} = -\operatorname{grad} p + (2\mu - \lambda) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}. \quad (10)$$

Führt man Gl. (10) in Gl. (8) ein, so erhält man unter Berücksichtigung von Gl. (4) die allgemeine EULERSche Bewegungsgleichung in der Form:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \mathbf{v} \operatorname{div} \rho \mathbf{v} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \\ &= \mathbf{f} - \operatorname{grad} p + \left(\frac{4}{3} \mu + \mu' \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (11)$$

3. Der Impulssatz

Den Impulssatz gewinnt man am einfachsten durch Integration von Gl. (8) über ein endliches Volumen und Transformation der dabei entstehenden Volumenintegrale in Oberflächenintegrale. Eine bekannte Verallgemeinerung des Gaußschen Satzes² liefert

$$\int \operatorname{div} \hat{T} dV = \oint (\mathbf{n} \cdot \hat{T}) da,$$

wobei \mathbf{n} die äußere Normale zum Flächenelement

² Siehe z. B. B. FRANK-MIESES, Differentialgleichungen der Physik, Verlag Vieweg, Braunschweig 1930, Bd. I, Kap. 2, §. 4.

da bedeutet und $(\mathbf{n} \cdot \vec{T})$ einen Vektor darstellt, dessen x -Komponente z. B. gegeben ist durch

$$(\mathbf{n} \cdot \vec{T})_x = n_x T_{xx} + n_y T_{xy} + n_z T_{xz}. \quad (12)$$

Die übrigen Komponenten folgen daraus durch zyklische Vertauschung. Der Vektor $(\mathbf{n} \cdot \vec{T})$ kann nun in folgender Weise dargestellt werden:

$$(\mathbf{n} \cdot \vec{T}) = -\mathbf{n} p - \mathbf{n} \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mu [\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}]. \quad (13)$$

Dies lässt sich leicht folgendermaßen verifizieren:
Unter Verwendung der Identität

$$[\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}] = \operatorname{grad}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

erhält man aus Gl. (13)

$$(\mathbf{n} \cdot \vec{T}) = -\mathbf{n} p - \mathbf{n} \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mu \operatorname{grad}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}). \quad (14)$$

Bildet man z. B. die x -Komponente von Gl. (14), so findet man

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \vec{T})_x = & -n_x p - n_x \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + \\ & + \mu \left(n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y \frac{\partial u}{\partial y} + n_z \frac{\partial u}{\partial z} + \right. \\ & \left. + n_x \frac{\partial v}{\partial x} + n_y \frac{\partial v}{\partial y} + n_z \frac{\partial v}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist mit Gl. (12) identisch, wenn man dort die Spannungskomponenten des Tensors in Gl. (1) einführt. Analog erhält man die Identitäten in den beiden übrigen Koordinatenrichtungen. Die linke Seite von Gl. (8) kann nun mit Hilfe einer bekannten Beziehung transformiert werden:

$$\int_V [\mathbf{v} \operatorname{div} \varrho \mathbf{v} + \varrho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] dV = \oint \varrho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) da. \quad (15)$$

Unter Verwendung der Beziehungen (4), (8), (13) und (15) erhält man schließlich den Impulssatz in der folgenden Fassung:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_V \varrho \mathbf{v} dV + \oint \varrho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) da \\ & = \mathbf{F} - \oint \mathbf{n} p da + \left(\mu' - \frac{2}{3} \mu \right) \oint \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{v} da + \\ & + 2\mu \oint (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v} da + \mu \oint [\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}] da. \quad (16) \end{aligned}$$

Die linke Seite stellt die gesamte Impulsänderung innerhalb des von der Integrationsfläche umschlossenen Gebiets dar; der erste Term die lokale, rein zeitliche Änderung des Volumenintegrals über die Impulsdichte $\varrho \mathbf{v}$, der zweite Term das Oberflächenintegral über die Normalkompo-

nente des Impulsflusses (Impulsdichte mal Geschwindigkeit) durch die Oberfläche.

Die rechte Seite enthält die Resultierende der äußeren Kräfte \mathbf{F} , die Druckwirkung über die Oberfläche und die Oberflächenwirkung der viskosen Kräfte. Die Volumenviskosität tritt, wie zu erwarten, nur in einem Term $\mu' \operatorname{div} \mathbf{v}$ auf, der die Volumenexpansions-Geschwindigkeit enthält.

Der Impulssatz in der Form der Gl. (16) bietet den Vorteil, dass er im wesentlichen Oberflächenintegrale über das zu betrachtende Gebiet enthält. Für periodische Vorgänge verschwindet im Zeitmittel die lokale Änderung der Impulsdichte und Gl. (16) enthält nur zeitlich gemittelte Oberflächenintegrale. Die gesamte „konvektionelle“ Änderung des Impulses im Innern des betrachteten Volumens V , die mit der räumlichen Verschiebung von Volumenelementen bzw. Partikeln innerhalb V verknüpft ist, lässt sich auf ein Oberflächenintegral über die Normalkomponente des Impulsflusses zurückführen. Die gesamte Wirkung der viskosen Kräfte innerhalb V reduziert sich auf eine Oberflächenwirkung, die durch die entsprechenden Glieder auf der rechten Seite von Gl. (16) wiedergegeben wird. Physikalisch ist dies durch den Umstand verständlich, daß die viskosen Kräfte als innere Kräfte sich bei der Integration über das Volumen paarweise aufheben, so daß in der Summe nur eine Oberflächenwirkung übrig bleibt.

4. Bemerkungen zu eindimensionalen Betrachtungen

Wir beschließen die allgemeinen Betrachtungen mit einigen Bemerkungen zum eindimensionalen Sonderfall, der zwar exakt nicht realisierbar ist, aber in gewissen Fällen nützliche Schlüsse erlaubt.

Aus der Bewegungsgleichung (11) ergibt sich mit $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$, $\mathbf{v} \equiv u$ und bei Abwesenheit äußerer Kräfte

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varrho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\varrho u^2) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{4}{3} \mu + \mu' \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (17)$$

Für zeitlich periodische Vorgänge folgt daraus nach zeitlicher Mittelung und Integration nach x

$$\overline{\varrho u^2} + \overline{p} - \left(\frac{4}{3} \mu + \mu' \right) \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} = \overline{\varrho u^2} - \overline{T_{xx}} = C, \quad (18)$$

wobei die Konstante C unabhängig von t und x ist. Dieselbe Gl. (18) findet man auch direkt aus der eindimensionalen Spezialisierung des Impulssatzes (16) bei zeitlicher Mitteilung und Integration über den Querschnitt Eins. Bezeichnen

wir mit $\bar{p}_t = \bar{p} - \left(\frac{4}{3}\mu + \mu'\right) \overline{(\partial u / \partial x)}$ die totale mittlere Druckwirkung in der x -Richtung, so gilt im Zeitmittel³

$$\overline{\rho u^2} + \bar{p}_t = C. \quad (19)$$

Nachdem ρu^2 als Dichte des Impulsflusses ($\rho u \cdot u$) durch den Einheitsquerschnitt interpretiert werden kann, besagt Gl. (19) physikalisch, daß jedem Verlust an Impulsfluß eine Druckzunahme entspricht. Betrachtet man zwei parallele Ebenen x_1 und x_2 , so stellt sich nach Gl. (19) bei einem Impulsflußverlust $-\Delta \rho u^2$ der akustischen Welle durch Absorption ein positiver mittlerer Druckanstieg $\Delta \bar{p}_t$ zwischen diesen beiden Ebenen ein. An der Volumeneinheit halten sich die Größen $\Delta \bar{p}_t$ und $-\Delta \rho u^2$ das Gleichgewicht. Die Absorption der Welle ist in der Näherung erster Ordnung durch $(\frac{4}{3}\mu + \mu')$ bestimmt, wie aus der Bewegungsgleichung (17) hervorgeht; in den Druckanstieg gehen daher sowohl die Scher- als auch die Volumenviskosität ein.

Fox und HERZFELD [9] haben die Beziehung (19) zu einer vereinfachten Erklärung der durch akustische Wellen in viskosen Medien verursachten Triftströmung herangezogen. Ihre Argumentation geht dahin, daß durch die Scher- und Volumenviskosität der Impulsfluß eine Verminderung in der Fortschreitungsrichtung der Welle erfährt und ein korrespondierender Druckgradient die Triftströmung zustande bringt. Als treibende Kräfte kann man die Komponenten T_{ii} in Gl. (1) ansehen, die von Scher- und Volumenviskosität abhängen, während die viskosen Schubspannungen T_{ik} , die der Scherviskosität allein proportional sind, der Strömung entgegenwirken. Dies macht plausibel, daß die Strömungsgeschwindigkeit, im

³ Über eine Anwendung der Gl. (19) auf die Messung akustischer Strahlung siehe [8].

Einklang mit ECKARTS Ergebnis, vom Verhältnis $(\frac{4}{3}\mu + \mu')/\mu = \frac{4}{3} + \mu'/\mu$ abhängt; ihre Messung erlaubt daher Aussagen über den Wert von μ'/μ [5].

Im streng eindimensionalen Problem, d. h. bei unendlichem Strahlquerschnitt, kommt eine Strömung jedoch nicht zustande, weil sich die treibende Kraft $-\Delta \rho u^2$ und der Druckanstieg $\Delta \bar{p}_t$ gerade das Gleichgewicht halten. Dieselbe wird vielmehr einer Verminderung von $\Delta \bar{p}_t$ zuzuschreiben sein, die durch die endliche Strahlausdehnung bedingt ist. Von wesentlichem Einfluß dürften dabei die Geschwindigkeitsgradienten $\partial u / \partial y$ bzw. $\partial v / \partial x$ sein, die bei einer eindimensionalen Betrachtung, bei der $\text{rot } v$ von vorneherein verschwindet, gar nicht ins Spiel kommen.

(Eingegangen am 22. September 1953.)

Schrifttum

- [1] ECKART, C., Phys. Rev. **73** [1948], 68.
- [2] WESTERVELT, P. J., J. acoust. Soc. Amer. **25** [1953], 60 und 799; Phys. Rev. **84** [1951], 152.
- [3] LIGHTHILL, M. J., Proc. roy. Soc. London, A **211** [1952], 564; siehe auch PROUDMAN, I., Proc. roy. Soc. London A **214** [1952], 119.
- [4] MARKHAM, J. J., Phys. Rev. **86** [1952], 497.
- [5] LIEBERMAN, L. N., Phys. Rev. **75** [1949], 1415.
- [6] Handbuch der Physik. Springer-Verlag, Berlin 1927, Band VII, S. 22.
- [7] MILNE-THOMSON, L. M., Theoretical hydrodynamics. Macmillan, New York 1950, S. 72.
- [8] BORGNIS, F. E., J. acoust. Soc. Amer. **25** [1953], 546.
- [9] FOX F. E. und HERZFELD K. F., Phys. Rev. **78** [1950], 156.
- [10] MAXWELL, J. C., Collected Papers II, 681; Cambridge 1890.
- [11] JONES, J. E., Phil. Trans. roy. Soc. London A **223** [1922], 1.
- [12] ROCARD Y., Ann. Phys. (Paris) **8** [1927], 5.
- [13] TISZA, L., Phys. Rev. **61** [1942], 531.
- [14] KOHLER, M., Z. Phys. **124** [1948], 757; **125** [1949], 715.
- [15] CHAPMAN, S. und COWLING, T. G., The mathematical theory of nonuniform gases. Univ. Press Cambridge 1952 (Historical Summary: S. 380).

A NEW METHOD OF COMPUTING ACOUSTICAL FILTERS

by W. K. R. LIPPERT

Division of Building Research, Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization, Australia

Summary

A new method of computing the sound reflection and transmission of acoustical filters which does not depend on the image parameter theory is presented. The transmitted and reflected sound pressure propagating along a duct with n equal filter sections connected in cascade is represented by the characteristic factors of one section which consists of a so-called symmetrical discontinuity with a duct piece of arbitrary length connected to the input and output. In loss-free cases the sound transmission and reflection can be found with the aid of diagrams. It is shown how the new method differs from the image parameter theory and that it is superior in cases of a small number of practically loss-free filter sections which are terminated by a non-reflecting duct system. The sound reflection and transmission of a filter with a reflecting output duct can be easily derived from the fundamental case with a non-reflecting terminal and this method can also be applied to filters that are terminated by non-equal sections.

Sommaire

On présente une méthode nouvelle pour calculer la réflexion et la transmission du son dans les filtres acoustiques, sans avoir recours à la théorie du paramètre image. La pression du son transmis et réfléchi qui se propage le long d'un conduit comportant n cellules filtrantes identiques et montées en cascade, est représentée par les coefficients caractéristiques d'une cellule constituée par ce qu'on appelle une discontinuité symétrique, ayant un tronçon de conduit, de longueur arbitraire, branché à l'entrée et à la sortie. Lorsqu'il n'y a pas de pertes, la transmission et la réflexion acoustiques peuvent être obtenues au moyen de diagrammes. On indique les différences existant entre la nouvelle méthode et la théorie du paramètre image; cette nouvelle méthode est supérieure dans le cas d'un petit nombre de cellules filtrantes qui sont pratiquement sans pertes et qui sont terminées par un système de conduit ne présentant pas de réflexions. On peut facilement déduire la réflexion et la transmission acoustiques dans le cas d'un filtre avec conduit de sortie réfléchissant, du cas fondamental d'une terminaison exempte de réflexions, et cette méthode est également applicable aux filtres terminés par des cellules qui ne sont pas identiques.

Zusammenfassung

Eine neue Methode zur Berechnung der Schallreflexion und der Schallübertragung von akustischen Filtern, die nicht von der Theorie der Wellenparameter abhängt, wird vorgelegt. Der Schalldruck des übertragenen und reflektierten Schalles, der sich in einem Rohr mit n gleichen und hintereinandergeschalteten Filterabschnitten ausbreitet, wird durch die charakteristischen Faktoren eines Abschnittes dargestellt, der aus einer sogenannten symmetrischen Stoßstelle mit einem davor- und dahintergeschalteten Rohrstück beliebiger Länge besteht. In verlustfreien Fällen kann die Schallübertragung und die Schallreflexion mit Hilfe von Diagrammen gefunden werden. Es wird gezeigt, wie sich die neue Methode von der Wellenparametertheorie unterscheidet und daß sie im Falle einer geringen Zahl von praktisch verlustfreien Filterabschnitten mit einem nichtreflektierenden Rohr als Abschluß überlegen ist. Die Schallreflexion und die Schallübertragung eines Filters mit reflektierendem Abschlußrohr kann leicht von dem fundamentalen Fall mit nicht-reflektierendem Abschluß abgeleitet werden, und dieses Verfahren kann auch auf Filter angewendet werden, die mit ungleichen Filterabschnitten abgeschlossen sind.

1. Introduction

The transfer constant of an acoustical filter is usually determined with the aid of the so-called image parameters [1], [2]. The reason for this is that it is easy to find the image transfer constant for an arbitrary number of acoustical filter sections connected in cascade from that for one filter section. The value of the image parameter theory, however, is often limited in practice; for example, if it is necessary to find the transfer constant of an acoustical filter which consists of a few sections only and which is terminated at the input and output terminals by a constant

and real impedance instead of the image impedance. It is true that the effective transfer constant can still be approximated quite well by the image transfer constant in the middle of the stop-bands, as will be shown later, but this is not so at other frequencies or in the pass-bands. In such cases it is theoretically possible to use correcting terms (so-called interaction factors) but this is usually impracticable because of the rather complicated frequency characteristic of the image impedance of most acoustical filters.

The purpose of this paper is to present a new method of computing the transfer constant (more strictly the characteristic reflection and trans-

mission factor) of acoustical filters which does not depend on the image parameters and is valid in the stop- and pass-bands. A specific advantage of this method is that the basic parameters (the characteristic factors of one filter section) can be easily measured, as has been shown in a recent paper [3], and that in loss-free cases the frequency characteristic of the transmission factors of n filter sections can generally be determined with the aid of diagrams. This simplifies the discussion of the effect of the various filter parameters on the frequency characteristics considerably and makes the new method particularly valuable in the practical design of acoustical filters.

A brief study of the relation of the characteristic factors to the image parameters will show that it is easy to represent the image transfer constant as well as the image impedance ratio by the characteristic factors. This indicates that the characteristic factors will be useful in other (e.g. electrical) filter problems as well.

2. The characteristic reflection and transmission factors of one filter section

Fig. 1 shows diagrammatically the structure of a symmetrical acoustical filter. The filter consists of a duct system of constant cross-section which has n equal symmetrical (but otherwise arbitrary) discontinuities separated by duct pieces of length l . The term discontinuity is used to describe that part of a duct between two parts of standard cross-section, in which the area, shape, medium, direction or specific acoustic impedance of the walls changes. The input and output part of the duct are of undefined length and at first no reflection is considered from the output duct (which has the characteristic impedance Z_0). Thus the acoustical filter can be divided into n equal sections. Each filter section is formed by the discontinuity and a duct piece of a length $l/2$ at the input and output. The single symmetrical discontinuity has the reference planes $1, 1'$ and $2, 2'$ and may be specified by the characteristic reflection and transmission factor $R' = A'e^{j\alpha}$ and $T' = B'e^{j\beta}$ and the characteristic impedance Z_0 of the input and output duct (cf. [3]). The characteristic reflection factor is the complex ratio of the sound pressure of the reflected wave and the incident wave at the input reference plane and the characteristic transmission factor is the ratio of the sound pressure of the transmitted wave at the output reference plane and the incident wave at the input plane if the output duct is terminated by Z_0 . The characteristic

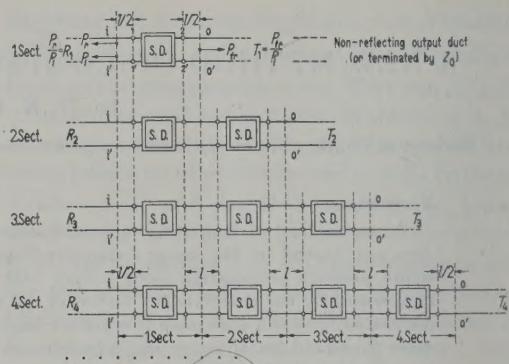


Fig. 1. Structure of multi-sectional acoustical filters with similar sections

i, i' = input reference plane of multi-sectional filter (or of one filter section)
 o, o' = output reference plane of S. D.
 $1, 1'$ = input reference plane of one filter section
 $2, 2'$ = output reference plane of one filter section
 S. D. = symmetrical discontinuity.

factors R, T for one filter section with the reference planes i, i' and o, o' (cf. Fig. 1) may be called $R_1 = A e^{j\alpha}$ and $T_1 = B e^{j\beta}$ and can be easily derived from R', T' and l , where:

$$A = A', \quad B = B' \quad (1)$$

and

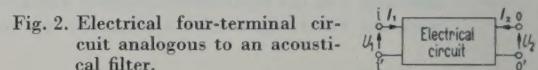
$$\alpha = \alpha' - 2\pi l/\lambda, \quad \beta = \beta' - 2\pi l/\lambda, \quad (2)$$

λ = wavelength.

These formulae for filters of different length are simple and particularly useful for the design if l is the parameter.

3. The characteristic factors for n filter sections

It will be shown below how the characteristic factors for n filter sections can be found from R and T . This can be done best by electrical analogy. Fig. 2 shows an electrical four-terminal



circuit analogous to one filter section, sound pressure and particle velocity being represented by voltage and current respectively¹.

¹ It may be noted here that it is possible to represent the volume velocity (particle velocity multiplied by cross-sectional area of the duct) instead of the particle velocity by the electrical current. The resultant changes in the argument are trifling because the filter systems which are investigated here are nothing but ducts connected in cascade which have the same cross-section at the input and output and at all connecting terminals. Thus a change of the analogy as mentioned above would not change the characteristic factors but merely the dimension of Z_0 (or of any other impedance) which is irrelevant.

For a linear, symmetrical and passive four-terminal circuit the following relations between the input and output voltages and currents are valid

$$U_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2, \quad U_2 = Z_{12} I_1 + Z_{11} I_2. \quad (3)$$

The coefficients in eq. (3) form the impedance matrix and are related to R and T by

$$\frac{Z_{11}}{Z_0} = \frac{1 - R^2 + T^2}{(1 - R)^2 - T^2}, \quad \frac{Z_{12}}{Z_0} = \frac{2T}{(1 - R)^2 - T^2} \quad (4)$$

as has been shown elsewhere [3].

If filters have to be connected in cascade, as in the present case, it is usual to transform the eq. (3) to the following form²:

$$U_1 = a U_2 - b I_2, \quad I_1 = c U_2 - a I_2. \quad (5)$$

The coefficients in eq. (5) are sometimes called the "transfer" matrix and fulfil the following relation [4]:

$$a^2 - b c = 1. \quad (6)$$

It can be easily shown from eqs (3)–(6) that

$$a = \frac{1 - R^2 + T^2}{2T}, \quad b = \frac{(1 + R)^2 - T^2}{2T} \cdot Z_0, \quad (7)$$

$$c = \frac{(1 - R)^2 - T^2}{2T} \cdot \frac{1}{Z_0},$$

or

$$R = \frac{(b/Z_0) - c Z_0}{2a + (b/Z_0) + c Z_0}, \quad (8)$$

$$T = \frac{2}{2a + (b/Z_0) + c Z_0}.$$

If two equal symmetrical filters with the coefficients a, b, c are connected in cascade, the coefficients a_2, b_2, c_2 of the resultant filter can be found by simple matrix algebra:

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix} \quad (9)$$

or making use of eq. (6) the coefficients are

$$a_2 = 2a^2 - 1, \quad b_2 = 2ab, \quad c_2 = 2ac. \quad (10)$$

In a similar way it can be seen that the coefficients a_n, b_n, c_n of n filter sections connected in cascade can be represented by the following matrix equation:

$$\begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & a_n \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix} \right)^n. \quad (11)$$

This is equivalent to

$$a_n = a \cdot a_{n-1} + \sqrt{(a_{n-1}^2 - 1)(a^2 - 1)}, \quad (12)$$

² The negative sign in eq. (5) is caused by the choice of the direction of I_2 in Fig. 2 which is useful because of symmetry with respect to the input and output terminal.

$$\frac{b_n}{b} = \frac{c_n}{c} = \sqrt{\frac{a_n^2 - 1}{a^2 - 1}}, \quad n = 2, 3, 4, 5, \dots \quad (12)$$

As $a_1 \equiv a$, this yields for two, three and four filters connected in cascade

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a^2 - 1 \\ a_3 &= 4a^3 - 3a \\ a_4 &= 8a^4 - 8a^2 + 1 \\ &\dots \end{aligned} \quad (13)$$

and

$$\begin{aligned} \frac{b_2}{b} &= \frac{c_2}{c} = 2a \\ \frac{b_3}{b} &= \frac{c_3}{c} = 4a^2 - 1 \\ \frac{b_4}{b} &= \frac{c_4}{c} = 8a^3 - 4a \\ &\dots \end{aligned} \quad (14)$$

If n filter sections are connected in cascade the resultant four terminal network is still a symmetrical filter and therefore the coefficients a_n, b_n, c_n are related to the characteristic factors $R_n = A_n e^{j\alpha_n}$ and $T_n = B_n e^{j\beta_n}$ by a formula identical in form to eq. (8). It is

$$R_n = \frac{(b_n/Z_0) - c_n Z_0}{2a_n + (b_n/Z_0) + c_n Z_0}, \quad (15)$$

$$T_n = \frac{2}{2a_n + (b_n/Z_0) + c_n Z_0}.$$

With the aid of this formula and eq. (7) and (12) the required relation between R_n, T_n and R, T can be derived.

This yields for the first four filter sections (cf. eq. (13) and (14))

1 section:

$$R_1 \equiv R,$$

$$T_1 \equiv T;$$

2 sections:

$$R_2 = R \left(1 + \frac{T^2}{1 - R^2} \right),$$

$$T_2 = \frac{T^2}{1 - R^2}; \quad (16)$$

3 sections:

$$R_3 = R \left[1 + \frac{T^2(1 - R^2 + T^2)}{(1 - R^2)^2 - R^2 T^2} \right],$$

$$T_3 = \frac{T^3}{(1 - R^2)^2 - R^2 T^2};$$

4 sections:

$$R_4 = R \left[1 + T^2 \frac{(1 - R^2)^2 + T^2(1 - 2R^2 + T^2)}{(1 - R^2)^3 - R^2 T^2(2 - 2R^2 + T^2)} \right],$$

$$T_4 = \frac{T^4}{(1 - R^2)^3 - R^2 T^2(2 - 2R^2 + T^2)}.$$

It is obvious that with increasing number n simplifications are sometimes possible by repeated use of transformations with smaller values of n , e. g. the characteristic factors for four sections could have been readily derived from those for two sections

$$R_4 = R_2 \left(1 + \frac{T_2^2}{1 - R_2^2} \right), \quad T_4 = \frac{T_2^2}{1 - R_2^2}. \quad (17)$$

However, even with this in mind, it may seem at this stage as if the general formulae, eq. (16), are far too complicated and not easy to discuss. It will be shown in the next sections that this is not true.

4. Acoustical filters with loss-free discontinuities

If the filter is loss-free or practically so, as in many applications, the general eq. (16) can be simplified considerably and can be represented graphically.

It has been shown elsewhere [3] that for a loss-free symmetrical discontinuity the following relation between the characteristic factors is valid:

$$A^2 + B^2 = 1, \quad \alpha - \beta = \mp \pi/2. \quad (18)$$

This is equivalent to the following formula:

$$R^2 = -(1 - B^2) e^{j2\beta} \quad (19)$$

whereby it is possible to eliminate R in the characteristic transmission factors T_n of eq. (16). As $T = B e^{j\beta}$, the magnitude B_n as well as the phase value β_n can be represented by B and β . This yields the following set of formulae for loss-free cases:

1 section:

$$B_1 \equiv B, \\ \beta_1 \equiv \beta;$$

2 sections:

$$B_2 = \frac{B^2}{\sqrt{B^4 + 4(1 - B^2) \cos^2 \beta}}, \\ \beta_2 = \arctan \left[\frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta + (1 - B^2)} \right] \\ = \arctan \left[\frac{2 \cos^2 \beta}{2 \cos^2 \beta - B^2} \tan \beta \right]; \quad (20)$$

3 sections:

$$B_3 = \frac{B^3}{\sqrt{B^4 - 8 \cos^2 \beta (1 - B^2) (B^2 - 2 \cos^2 \beta)}}, \\ \beta_3 = \arctan \left[\frac{\sin 3\beta + (1 - B^2) \sin \beta}{\cos 3\beta + 3(1 - B^2) \cos \beta} \right] \\ = \arctan \left[\frac{4 \cos^2 \beta - B^2}{4 \cos^2 \beta - 3 B^2} \tan \beta \right];$$

4 sections:

$$B_4 = \frac{B^4}{\sqrt{B^8 + 16 \cos^2 \beta (1 - B^2) (B^2 - 2 \cos^2 \beta)^2}}, \\ \beta_4 = \arctan \left[\frac{\sin 4\beta + 2(1 - B^2) \sin 2\beta}{\cos 4\beta + (1 - B^2)(4 \cos 2\beta + 3 - B^2)} \right] \\ = \arctan \left[\frac{8 \cos^4 \beta - 4 B^2 \cos^2 \beta}{8 \cos^4 \beta - 8 B^2 \cos^2 \beta + B^4} \tan \beta \right]$$

.....

This result is significant since there are now only two independent variables, and further, the values of B_n and β_n are periodic functions of β and can be represented easily by diagrams, B being taken as the parameter. This has been

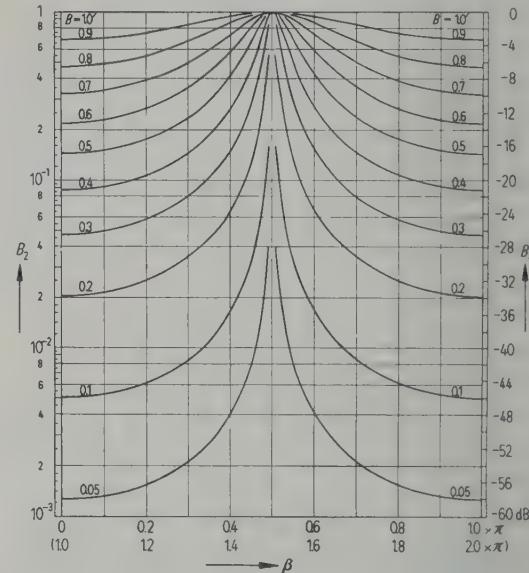


Fig. 3a. B_2 plotted over β for different values of B .

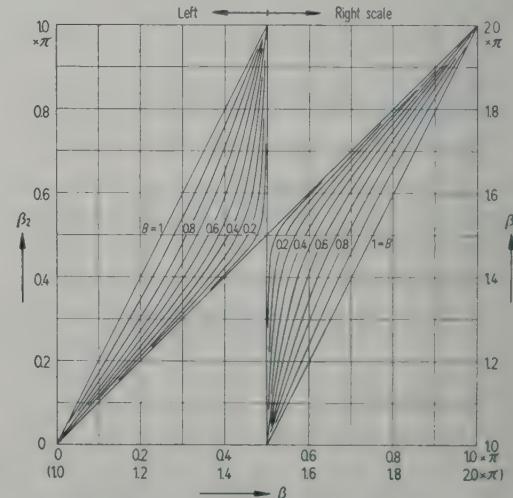


Fig. 3b. β_2 plotted over β for different values of B .

done for 2, 3 and 4 filter-sections in Figs. 3a and b, 4a and b, and 5a and b.

From these figures it can be seen that there are minima of B_n (indicating stop-bands) at values of $\beta = \pm N\pi$ where $N = 0, 1, 2, 3, \dots$ and $B \neq 1$. These minima decrease with a decrease in B and with an increase in the number of filter sections.

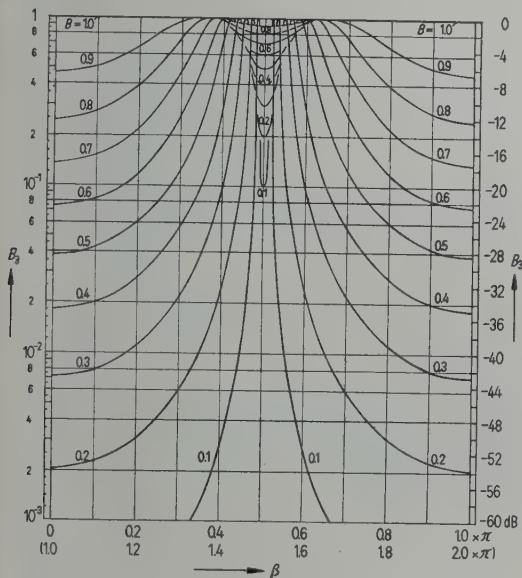


Fig. 4a. B_3 plotted over β for different values of B .

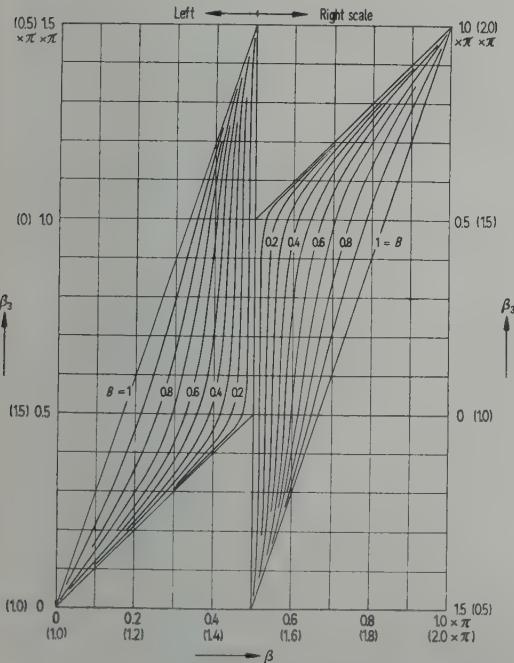


Fig. 4b. β_3 plotted over β for different values of B .

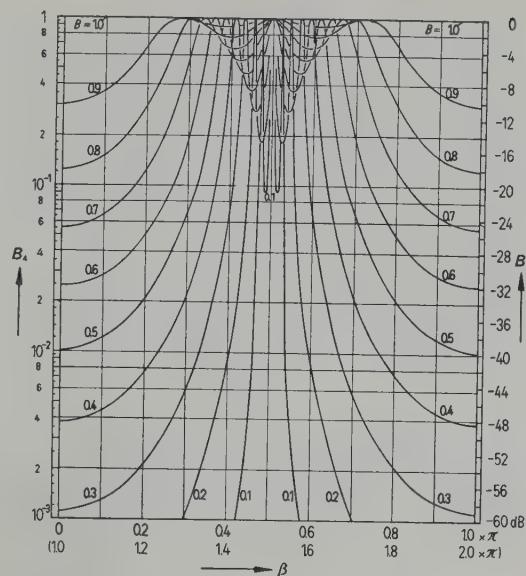


Fig. 5a. B_4 plotted over β for different values of B .

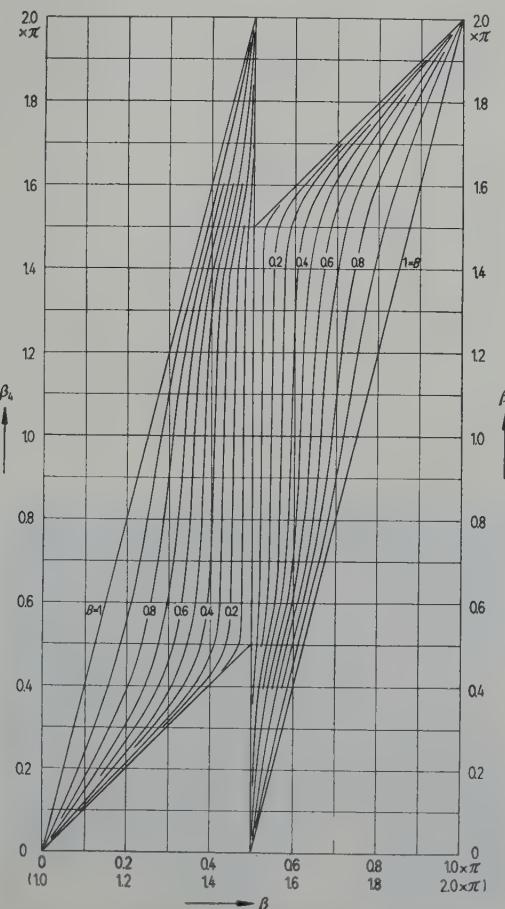


Fig. 5b. β_4 plotted over β for different values of B .

Between two successive stop-bands the value of B_n increases and reaches the value of unity ($n-1$) times so that there are pass-frequencies rather than pass-bands. It can be seen that the values of B_n as well as the ones of β_n are repeated if β is increased or reduced by $N\pi$ except for the values of β_n if n is an uneven number. In this case β_n is periodic with $\beta \pm 2N\pi$ as can be seen from Fig. 4b.

If necessary, the values of R_n (or A_n and α_n) can be determined easily from the values of B_n and β_n , because a relation identical in structure to eq. (18) is obviously valid for n filter-sections also:

$$A_n^2 + B_n^2 = 1, \quad \alpha_n - \beta_n = \mp \pi/2. \quad (21)$$

The easiest way to illustrate the applicability of the theory is to refer to actual measurements, and therefore a simple measured example will be described.

5. Measured example

A duct with square internal cross-section of $S = 7.5 \text{ cm}$ (3 in.) and two rectangular bends forming a two-sectional acoustical filter is shown in Figs. 6 and 7. One filter section consists of the right-angled discontinuity with the input refer-

ence plane 1, 1' and the output plane 2, 2' and of a duct piece of a length of $l/2 = 7.5 \text{ cm}$ (3 in.) connected at the input and output. The whole filter has the input and output reference planes at i, i' and o, o' . The duct part with the double bends was made of hardwood (1.9 cm or $\frac{3}{4}$ in. thick) and the input and output duct was made of brass (0.95 cm or $\frac{3}{8}$ in. thick) with the same non-reflecting terminal as described in measurements at a single right-angled bend [5]. The characteristic factors of the double bend can be derived from the data of the single bend with the aid of the diagrams of Fig. 3a and b without any other measurements—this will be described first—and as those factors have been measured also it will be possible to compare the experimental and theoretical results. This provides a good check on the theory derived above.

The characteristic transmission and reflection factor $T' (= B'e^{j\beta'})$ and $R' (= A'e^{j\alpha'})$ of a single right-angled bend (with the reference planes at 1, 1' and 2, 2' as shown in Fig. 6) are well known from earlier measurements [5] and they can be easily transformed for the particular position of the reference planes of one filter section in Fig. 6. Let the characteristic transmission factor of one filter section of Fig. 6 be $T = Be^{j\beta}$, then

$$B = B', \quad \beta = \beta' - 2\pi l/\lambda, \quad (22)$$

$$l = 15 \text{ cm} \text{ (cf. Fig. 6).}$$

In Fig. 8a and b the values of $B, A (= A')$ and of β' and β are plotted over the dimensionless parameter $\theta = 2\pi S/\lambda$ and as θ is proportional to the frequency, the particular frequency scale is given also.

The values of B and β at various frequencies have been used to find the values of B_2 and β_2 with the aid of the diagrams of Fig. 3a and b, which is a quick and easy method and makes the specific value of the diagrams obvious. A_2 and α_2 have been determined with eq. (21). These computed values of B_2, A_2, β_2 and α_2 are the dotted curves in Fig. 8a and b. It can be seen that the resultant frequency characteristics for the various factors of the double bend are complex curves compared with those of the single bend.

The characteristic factors of the double bend have been measured by using the same technique as described in measurements with the single right-angled bend. The standing wave in the input duct and the progressive wave in the output duct were explored with a probe tube microphone and the measurements were used to determine the sound pressure ratios, distance differences and wavelength as is shown in an example in Fig. 6.

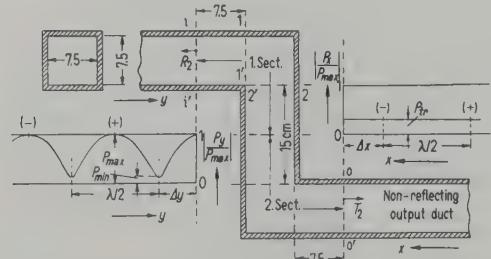


Fig. 6. Duct with two rectangular bends and specification of the measured quantities.

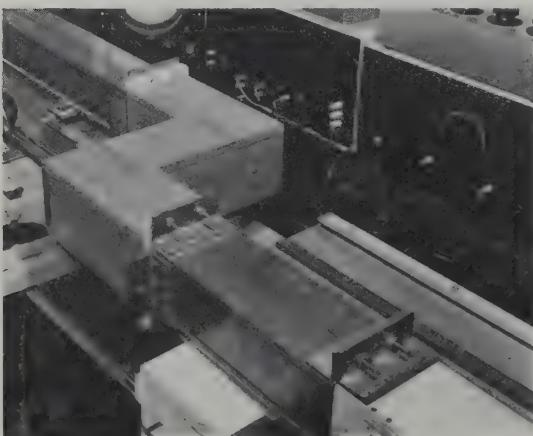


Fig. 7. The measured duct system.

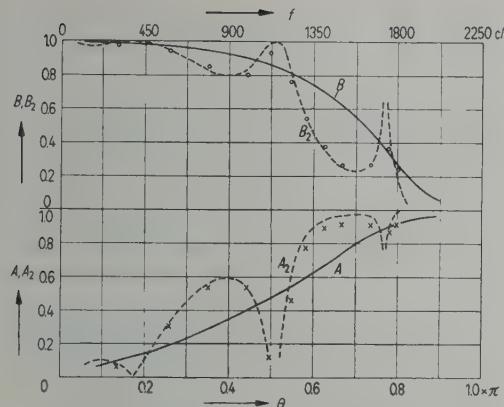


Fig. 8a. The magnitude of the characteristic factors for one rectangular bend, A and B , and for two bends, A_2 and B_2 (after Fig. 6), plotted over θ (and the frequency f).

○○○ B_2 measured
××× A_2 measured
— — — computed curves.

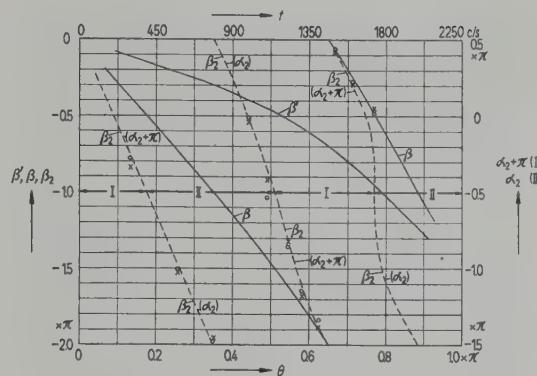


Fig. 8b. The phase values of the characteristic transmission factor of one rectangular bend, β' and β , for two positions of the reference planes and of two bends, B_2 and α_2 (after Fig. 6), plotted over θ (and the frequency f).

○○○ β_2 measured
××× α_2 or $\alpha_2 + \pi$ measured
— — — computed curves.

Table I

f	λ	$\frac{\theta}{\pi}$	$\frac{P_{\min}}{P_{\max}}$	$\frac{P_{\text{tr}}}{P_{\max}}$	Δy	Δx	A_2	$\frac{\alpha_2}{\pi}$	B_2	$\frac{\beta_2}{\pi}$	$A_2^2 + B_2^2$	$\frac{\alpha_2 - \beta_2}{\pi}$
c/s	cm				cm	cm						
300	113	0.133	0.88	0.92	-10	-5	0.06	-1.35	0.98	-0.77	0.96	-0.58
600	57.2	0.264	0.54	0.72	-0.2	28.6	0.30	-1.02	0.94	-1.51	0.97	+0.49
800	42.2	0.356	0.31	0.56	16.3	-5.2	0.53	-1.46	0.85	-1.98	0.99	+0.52
1000	34.5	0.438	0.30	0.52	8.3	-8.5	0.54	-0.04	0.80	-0.51	0.93	+0.47
1125	31.0	0.487	0.79	0.83	4.5	18.3	0.12	-0.43	0.93	-1.03	0.88	+0.60
1200	28.1	0.537	0.37	0.52	8.3	8.3	0.46	-1.82	0.76	-1.32	0.79	-0.50
1300	26.2	0.576	0.13	0.31	5.4	5.8	0.77	-2.18	0.54	-1.65	0.88	-0.53
1400	24.4	0.620	0.06	0.20	3.8	4.4	0.89	-2.38	0.37	-1.84	0.93	-0.54
1500	22.9	0.660	0.05	0.14	2.4	2.8	0.91	-0.59	0.27	-0.05	0.90	-0.54
1600	21.2	0.712	0.05	0.14	1.1	1.4	0.91	-0.80	0.27	-0.27	0.90	-0.53
1700	19.7	0.770	0.07	0.19	0.3	0.0	0.87	-0.95	0.36	-0.47	0.89	-0.48
1800	19.0	0.800	0.05	0.12	—	—	0.91	—	0.23	—	0.88	—

In Table I the measured quantities and the corresponding characteristic reflection and transmission factors $R_2 = A_2 e^{j\alpha_2}$ and $T_2 = B_2 e^{j\beta_2}$ are given for various frequencies and for the input and output reference planes at i, i' and o, o' of Fig. 6. The symbols represent:

f = frequency,
 λ = wavelength,
 θ = $2\pi S/\lambda$,
 S = width of the duct,
 P_{\min}/P_{\max} = ratio of minimum to maximum sound pressure of the standing wave,

P_{tr}/P_{\max} = ratio of the transmitted sound pressure (in the output duct) to the maximum sound pressure of the standing wave,

Δy = distance difference between the input reference plane (i, i') and the first minimum,

Δx = distance difference between the output reference plane (o, o') and the position in the transmitted wave where the phase is π different from the phase at the maximum between the first and second minimum.

From these quantities the magnitude (B_2, A_2) and the phase values (β_2, α_2) of the characteristic factors can be easily found (cf. [3]) and they are given in Table I and are plotted also in Fig. 8 a and b. It can be seen that these measured values agree with the dotted (computed) curves as well as can be expected from the accuracy of the measurements.

The last two columns of Table I show that the conditions for a loss-free filter are only approximately fulfilled. The approximation is, however, good enough to justify the application of the diagrams (which represent the simple eq. (20)) so that it is not necessary to use the general eq. (16). The difference between the phase values ($\alpha_2 - \beta_2$) of the characteristic factors is either approximately $-\pi/2$ or $+\pi/2$ with the change at frequencies where the magnitude of the characteristic transmission factor (B_2) has a maximum. These measurements illustrate the working of the proposed method and its ease of application.

6. Relation between the characteristic factors and the image parameters

In many practical cases the new method of computing acoustical filters is superior to the conventional methods and this can be further seen by considering the relation between the characteristic factors (of one filter section) and the corresponding image parameters. Fig. 9

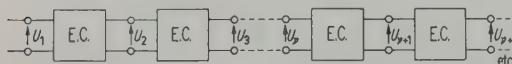


Fig. 9. Specification of the image transfer factor

$$F = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \dots = \frac{U_{v+1}}{U_v}$$

(E. C. = electrical circuit).

shows an infinite number of symmetrical filter sections connected in cascade. The impedance (image impedance) at the input of each filter section is equal to the load impedance at the output and the ratio U_{v+1}/U_v of output and input voltage is the same for any filter section. As nothing but symmetrical networks are considered, it is useful to introduce the impedances Z_1 and Z_2 of the equivalent lattice type circuit. They are related to the impedance matrix eq. (3) by

$$Z_1 = Z_{11} - Z_{12}, \quad Z_2 = Z_{11} + Z_{12}. \quad (23)$$

Call the image transfer constant Γ or the image transfer factor F and the image impedance Z_i and then the following simple relations exist [4]:

$$F = \frac{U_{v+1}}{U_v} = e^{-\Gamma} = \frac{\sqrt{Z_2/Z_1 - 1}}{\sqrt{Z_2/Z_1 + 1}}, \quad (24)$$

$$Z_i = \sqrt{Z_1 \cdot Z_2}. \quad (25)$$

With eq. (4), (23), (24) and (25) it yields

$$\coth \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{(1+T)^2 - R^2}{(1-T)^2 - R^2}} \quad (26)$$

and $Z_i = Z_0 \sqrt{\frac{(1+R)^2 - T^2}{(1-R)^2 - T^2}}. \quad (27)$

For simplification only the loss-free case will be discussed. For one section it follows from (26), (27) and (18) or (19)

$$\coth \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{\cos \beta + B}{\cos \beta - B}} \quad (28)$$

and

$$\frac{Z_i}{Z_0} = \sqrt{\frac{\cos \alpha + A}{\cos \alpha - A}} = \sqrt{\frac{\pm \sin \beta + \sqrt{1 - B^2}}{\pm \sin \beta - \sqrt{1 - B^2}}}. \quad (29)$$

The significant feature of these formulae is that obviously the characteristic transmission factor (B and β) alone is sufficient to represent the image transfer constant as well as the image impedance ratio (normalized image impedance) in a simple way.

In Fig. 10 a and b the magnitude ($|F|$) and the phase value (φ) of the image transfer factor F

$$F = |F| e^{i\varphi} = \frac{\sqrt{\frac{\cos \beta + B}{\cos \beta - B} - 1}}{\sqrt{\frac{\cos \beta + B}{\cos \beta - B} + 1}} \quad (30)$$

has been plotted over β for different values of B . There are pass-bands for $\cos^2 \beta < B^2$ and stop-bands for $\cos^2 \beta > B^2$. At a cut-off frequency, $\cos^2 \beta = B^2$. In a pass-band ($\cos^2 \beta < B^2$)

$$|F| = 1 \quad \text{and} \quad \varphi = \arccos \left(\frac{\cos \beta}{B} \right) \quad (31)$$

and in a stop-band ($\cos^2 \beta > B^2$)

$$|F| = \pm \tanh \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctanh} \left(\frac{B}{\cos \beta} \right) \right] \quad (32)$$

and $\varphi = \pm N\pi$.

The image transfer factor $F_n = |F_n| e^{i\varphi_n}$ for n filter sections is easily found from

$$|F_n| = (|F|)^n \quad \text{and} \quad \varphi_n = n \cdot \varphi. \quad (33)$$

With these formulae and Fig. 10 a and b it is easy to compare the image transfer factors for n filter sections with the corresponding characteristic transmission factors of Figs. 3, 4 and 5. There is one important common feature. In the

centre of a stop-band (where $\beta = \pm N\pi$) there is very nearly

$$|F_n| \approx \frac{1}{2} B_n. \quad (34)$$

At other frequencies, however, the difference between the image and characteristic factors is striking. It is obviously advantageous to use the characteristic factors directly instead of the image parameters in cases where the acoustical filter is terminated by a non-reflecting duct and has not too many sections.

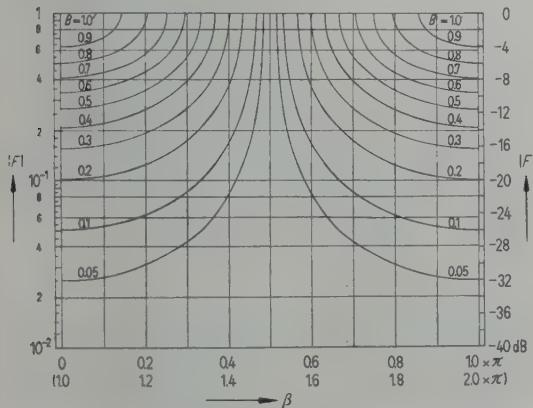


Fig. 10a. Magnitude ($|F|$) of the image transfer factor plotted over β for different values of B .

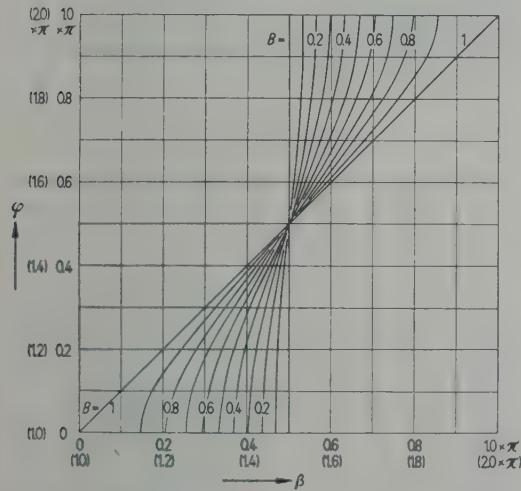


Fig. 10b. Phase (φ) of the image transfer factor plotted over β for different values of B .

7. Acoustical filter terminated by a reflecting duct or by dissimilar filter sections

The specification of the characteristic factors is based on the supposition that the acoustical filter is or can be terminated by a non-reflecting duct system. From a practical point of view as

well as for measuring purposes it is useful to consider briefly how the transmission and reflection of sound are changed if there is a reflection from the output duct (or, as it could be expressed, if the filter is terminated by an impedance other than the constant and real value of Z_0). It will be shown that even in such cases the characteristic factors are helpful for describing the changes that occur.

An easy way for specifying the physical situation is given in Fig. 11. In (a) of Fig. 11 a symmetrical filter is shown diagrammatically with the input and output reference planes at i, i' and o, o' . It is terminated by a non-reflecting duct with the characteristic impedance Z_0 . Such filters can be specified completely by the characteristic factors R and T and by Z_0 .

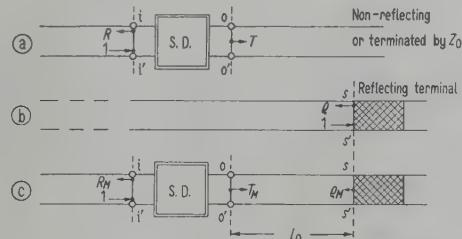


Fig. 11. Reflection and transmission factors of a symmetrical discontinuity with a non-reflecting and a reflecting output duct (S.D. = symmetrical discontinuity).

- Symmetrical discontinuity with a non-reflecting output duct.
- Reflecting terminal.
- Symmetrical discontinuity with reflecting output duct.

In (a) of Fig. 11 R and T are symbolized by small arrows which show the direction of sound propagation, the sound pressure of the incident wave at the input terminal being symbolised by an arrow of unit length. In (b) a duct with the same cross-section as in (a) of Fig. 11 but with a reflecting terminal at s, s' is shown. The complex ratio of reflected to incident sound pressure at s, s' is called ϱ . In (c) of Fig. 11 the filter of (a) is terminated by a reflecting duct (as specified in (b)) with the length of l_0 between the reference planes at o, o' and s, s' . The values for the reflection and transmission factors R_M, T_M and ϱ_M as shown in (c) of Fig. 11 can be easily found by superposing all possible reflected and transmitted waves at the different terminals; they are

$$R_M = R + \frac{\varrho T^2 e^{-j4\pi l_0/\lambda}}{1 - \varrho R e^{-j4\pi l_0/\lambda}}, \quad (35)$$

$$T_M = \frac{T}{1 - \varrho R e^{-j4\pi l_0/\lambda}},$$

$$\varrho_M = \frac{\varrho T e^{-j2\pi l_0/\lambda}}{1 - \varrho R e^{-j4\pi l_0/\lambda}}. \quad (35)$$

R_M and T_M are the modified values of R and T , if $\varrho \neq 0$. There is a standing wave in the output duct as well as in the input duct and the eq. (35) are relatively simple, especially if $|\varrho| \ll 1$ which is of interest for measuring techniques. It may be noted that the reflection factor at the terminal s, s' can be represented equivalently by an impedance value Z_s . It is

$$\varrho = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0}. \quad (36)$$

The formulae of eq. (35) are valid for general symmetrical filters and can be used for the n -sectional acoustical filters as discussed above by taking R_n and T_n instead of R and T .

If one compares the sound reflection at s, s' in (b) and at i, i' in (c) of Fig. 11, it is obvious that a repeated application of the method of the reflecting output duct shown in Fig. 11 and eq. (35) can be used to describe the sound reflection and transmission of filters that are terminated by dissimilar filter sections as well. Another systematic way of modifying the structure of the filters of Fig. 1 is to change the reference planes (cf. eq. (1) and (2)) at various stages of the transformation to multi-sectional filters. Therefore, the range of acoustical filters covered by the theory presented above is much wider than has been specified by the structure of Fig. 1.

8. Conclusions

A new method of computing the sound transmission and reflection at acoustical filters is presented. This method does not depend on the image parameter theory and is particularly valuable for symmetrical filters consisting of a small number of filter sections only. In loss-free cases the sound reflection or transmission of n filter sections can be found with the aid of diagrams from the characteristic factors of one section. A measured example shows the practical applicability of the method which is considered to be superior to the image parameter method in cases where the filter is terminated by a non-reflecting duct system. If sound reflection from the output duct or a dissimilar filter section has to be taken into account, the resultant change of the reflection and transmission factors can be found in a relatively simple way.

(Received 1st December, 1953.)

References

- [1] WAETZMANN, E. und NOETHER, F., Über akustische Filter. Ann. Phys. Lpz. (5) **13** [1932], 212-228.
- [2] MASON, W. P., Electromechanical transducers and wave filters. D. van Nostrand Comp. Inc., New York 1946.
- [3] LIPPERT, W., A method of measuring discontinuity effects in ducts. Acustica **4** [1954], 307-312.
- [4] CAUER, W., Theorie der linearen Wechselstromschaltungen. Akad. Verlagsges., Leipzig 1941.
- [5] LIPPERT, W., The measurement of sound reflection and transmission at right-angled bends in rectangular tubes. Acustica **4** [1954], 313-319.

BOOKREVIEW

A.E. Greenlees, The amplification and distribution of sound; 3rd ed. (revised) Chapman and Hall Ltd., London 1954, 300 pages, 114 fig., 21 x 15 cm², price 35 sh.

The book is suitable as a general introduction in the field of electro-acoustics. It is easy to read and gives a reasonably complete review of the various types of microphones, pick-ups, amplifiers and loudspeakers.

However, according to the Introduction, the book should contain "the latest developments in the field of electro-acoustics, together with all the items, the worker in this

field is familiar with". Taking this aim of the book rigorously one ought to say that the author has not been successful since the specialist in electro-acoustics does hardly find any news in the book. Although the newest developments are mentioned, subjects like fine-groove recording, magnetic tape recording, loudspeaker columns, etc. are hardly dealt with, whereas amplifiers nowadays will have negative feedback, more modern tubes etc.

Nevertheless, the book may be recommended to those who want a simple and rapid introduction in a new field.

J. J. GELUK, Hilversum

AKUSTISCHE MESSUNGEN AN EINEM MECHANISCHEN MODELL DES INNENOHRES

Ein Beitrag zur Hydrodynamik der Cochlea

von H.-G. DIESTEL

III. Physikalisches Institut der Universität Göttingen

Zusammenfassung

Ein mechanisches Modell des Innenohres wird konstruiert, das im Mittel etwa 55fach gegenüber dem Ohr vergrößert ist. Die Frequenzen werden so transformiert, daß die Geschwindigkeiten und die Impedanzen im Modell mit denen des Ohres nahezu übereinstimmen. An diesem Modell werden der Druckverlauf in der Flüssigkeit, die Schnelle der Membran, die Impedanz der Membran und die Eingangsimpedanz am „ovalen Fenster“ nach Betrag und Phase gemessen. Die Übereinstimmung zwischen gemessenen und gerechneten Werten ist gut. Die Membranauslenkungen und die Flüssigkeitswirbel werden für verschiedene Frequenzen photographiert.

Summary

A mechanical model of the inner ear with on the average 55-fold exaggeration of scale has been constructed. The frequencies are so transformed that velocities and impedances in model and ear are nearly the same. In this model, the pressure in the liquid, the motion and impedance of the membrane as well as the entry impedance of the "oval window" are measured in magnitude and phase, with good agreement between theory and experiment. The deflections of the membrane and the vortices in the liquid at various frequencies are photographed.

Sommaire

On a construit, avec un agrandissement moyen de 55/1, une maquette mécanique de l'oreille interne. On a modifié les fréquences de façon que les vitesses et impédances soient sensiblement les mêmes dans la maquette et dans l'oreille naturelle. On a mesuré avec cette maquette l'amplitude et la phase de la variation de pression dans le liquide, de la vitesse et de l'impédance de la membrane, et l'impédance d'entrée de la «fenêtre ovale». Il y a bon accord entre les valeurs mesurées et celles calculées. On a photographié pour différentes fréquences les déviations de la membrane et les tourbillons dans le liquide.

1. Einleitung

Die Erregung der Hörnerven geschieht durch mechanische Schwingungen im Innenohr. Das Innenohr besteht, physikalisch gesehen, aus einem von starren Wänden umgebenen mit Flüssigkeit gefüllten Kanal, der Schnecke. Er ist durch eine elastische Trennwand, den Ductus cochlearis, seiner Länge nach in zwei Teile, die Scala vestibuli und die Scala tympani, geteilt. Der Ductus cochlearis schwingt als einheitliches Ganzes und besteht im wesentlichen aus der Basilarmembran, der Reißnerschen Membran und der dazwischenbefindlichen Endolymphe. Der Kürze halber soll in Zukunft mit dem Ausdruck Basilarmembran der ganze Ductus cochlearis gemeint sein.

Am hinteren Ende stehen die beiden Scalen durch eine Öffnung, das Helicotrema, miteinander in Verbindung. Am vorderen Ende werden sie durch je eine elastische Membran, das ovale bzw. runde Fenster, abgeschlossen. Wird durch den Mechanismus Hammer-Amboß-Steigbügel am

ovalen Fenster das Innenohr zu Schwingungen angeregt, so pflanzen sich Druckwellen in der Scala vestibuli fort. Sie treten über die Basilarmembran in die Scala tympani ein und laufen zum runden Fenster. Bei sehr tiefen Frequenzen findet der Druckausgleich über das Helicotrema statt.

Es ist v. BÉKÉSY gelungen, das dynamische und statische Verhalten des Innenohres eingehend zu untersuchen [1]. Er beobachtete längs der Basilarmembran forschreitende Wellen, die an einer von der erregenden Frequenz abhängigen Stelle ein Amplitudenmaximum aufweisen und dahinter schnell abklingen. Ihre Wellenlänge wird mit der Entfernung von den Fenstern stetig kleiner. Weiter stellte v. BÉKÉSY fest, daß die mechanischen Eigenschaften der Basilarmembran stark ortsabhängig sind. Die Federung der Membran nimmt mit der Entfernung von den Fenstern zu. Das logarithmische Dekrement der Membranschwingungen ist über die ganze Membran nahezu konstant etwa 1,6. Die Dämpfung ergibt sich also beinahe aperiodisch und erklärt die kurze Einschwingzeit des Ohres.

Die experimentellen Ergebnisse von v. BÉKÉSY sind von verschiedenen Autoren theoretisch ge deutet worden. In einer grundlegenden Arbeit gab RANKE [2] eine Theorie der Hydrodynamik der Schneckenflüssigkeit. Er behandelte die Potentialschwingungen als Randwertproblem. Die Konstanten der Membranimpedanz wurden den Verhältnissen im Ohr angepaßt.

ZWISLOCKI [3], PETERSEN und BOGERT [4] und FLETCHER [5] beschränkten sich auf den Fall, daß die Wellenlänge im Kanal groß gegen die Querabmessungen ist. Sie erhalten im wesentlichen die gleiche Differentialgleichung, interpretieren sie aber in verschiedener Weise. Bestim mend für die Wellenausbreitung im Innenohr ist stets die stark ortsabhängige Federung der Basilarmembran.

Die charakteristischen Membranschwingungen wurden von v. BÉKÉSY und anderen Autoren auch in Modellversuchen beobachtet [1], [3], [6]. Der Druckverlauf im Ohr ist bisher nicht gemessen worden. BOGERT [7] bildete das Innenohr mit Hilfe einer elektrischen Ersatzschaltung nach, um den Einfluß der Dämpfung zu untersuchen.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, ein stark vergrößertes Ohrmodell zu konstruieren, das den Verhältnissen im Innenohr qualitativ entspricht. An diesem Modell sollen die interessierenden Größen: Druckverlauf in der Flüssigkeit, Phasengeschwindigkeiten, Auslenkung der Membran, die Impedanz der Membran und die Eingangsimpedanz des Modells gemessen und mit der Theorie verglichen werden.

2. Zur Hydrodynamik des Innenohres

Im folgenden wird eine kurze Abhandlung der Hydrodynamik des Innenohres in Anlehnung an die Arbeiten von RANKE, ZWISLOCKI, PETERSEN und BOGERT, und FLETCHER gegeben. In der Nähe der Fenster ist die Wellenlänge groß gegen die Querabmessungen der Scalen. In diesem Ge biet wird die Wellenausbreitung durch eine Diffe rentialgleichung beschrieben, die für den Fall kleiner Amplituden abgeleitet werden soll. FLET CHER berücksichtigt die Zähigkeitsverluste in der Flüssigkeit, kann sie jedoch in der Rechnung ver nachlässigen, da sich ihr Einfluß als gering her ausstellt. Er unterteilt die Basilarmembran in kleine quadratische Membranelemente, die gleich phasig und ohne seitliche Kopplung schwingen sollen. Die mitschwingende Flüssigkeitsmasse wird zur Membranmasse hinzuaddiert, sie ist als starr mit dem Membranelement verbunden zu denken. Wenn p den Druck in der Flüssigkeit be deutet, wirkt auf ein Element die Kraft pb^2 . (Die

Breite des Elements sei b .) Die Impedanz eines Membranelements, d. h. das komplexe Verhältnis von Kraft zu Schnelle senkrecht zur Membran läßt sich durch den Ausdruck

$$Z(x) = j\omega M + R + \frac{1}{j\omega F},$$

der ursprünglich nur für punktförmigen Kraft ansatz definiert ist, beschreiben. M ist die Ge samtmasse, R der Reibungswiderstand und F die Federung.

Es ist für die Messungen einfacher, mit einem Einkanalmodell zu arbeiten. Man denke sich die Flüssigkeit aus der Scala tympani entfernt und hat dann eine Flüssigkeitssäule, die an drei Seiten schallhart begrenzt ist, während an der vierten Seite die Randbedingung durch den Widerstand der Membran gegeben wird. An den physikalischen Verhältnissen ändert sich durch den Übergang zum Einkanalmodell nichts Wesentliches. Deshalb wurde diese Form für Modellversuche meist verwendet [1], [3].

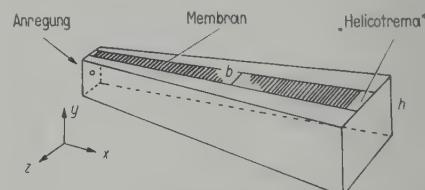


Abb. 1. Das Einkanalmodell (schematisch).

Die Abb. 1 zeigt das Einkanalmodell in schematischer Darstellung. Betrachtet man einen Streifen von der Breite dx , so gilt für ihn nach dem Newtonschen Grundgesetz bei Vernachlässigung der Zähigkeit:

$$j\omega \varrho u = -\frac{\partial p}{\partial x}. \quad (1)$$

Es bedeuten:

$u, v = x$ - bzw. y -Komponente der Flüssigkeits geschwindigkeit,

$p =$ Schalldruck,

$\varrho =$ Dichte,

$S =$ Querschnitt des Kanals,

$b =$ Breite der Membran,

$h =$ Tiefe des Kanals,

$\omega =$ Kreisfrequenz.

Der Druck ist im Falle großer Wellenlängen über den Querschnitt konstant. Die mitschwingende Flüssigkeitsmasse ist klein gegen die unter einem Membranelement befindliche Flüssigkeitsmasse. Wegen der Nachgiebigkeit der Membran ist es erlaubt, die Flüssigkeit als inkompressibel zu behandeln. Dann ergibt sich für die Kontinuitäts gleichung

$$\frac{\partial(Su)}{\partial x} + \bar{v}b = 0. \quad (2)$$

\bar{v} ist die mittlere Geschwindigkeit der Membran in y -Richtung. Die Impedanz der Membran liefert die noch fehlende Beziehung zwischen Druck und Schnelle. Es ist

$$\bar{v} = \frac{p b^2 n}{Z}. \quad (3)$$

Der Faktor n berücksichtigt die seitliche Einspannung der Membran und hat nach FLETCHER Werte von $0,3 \dots 1$. Aus den Gl. (1)–(3) folgt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{j \omega \varrho b^3 n}{Z S} p = 0. \quad (4)$$

Sie entspricht der Trichterwellengleichung [9], [10], jedoch ist hier der Faktor von p eine Funktion des Ortes. Wegen des komplexen Verlaufes von Z wird es im allgemeinen nicht möglich sein, die Gleichung in geschlossener Form zu lösen. Sind Z , S und b als Funktionen von x bekannt, so ist eine numerische Integration möglich. In der Nähe einer Stelle x_0 kann der Querschnitt durch den Ansatz $S = S_0 + 2a(x - x_0)$ angenähert werden. In diesem Bereich gilt dann die Gleichung

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{2a}{S} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{j \omega \varrho b^3 n}{Z S} p = 0, \quad (5)$$

in welcher die Koeffizienten als konstant angesehen werden können.

Da im Ohr für die meisten Frequenzen keine Reflexion am Helicotrema eintritt, soll auch im Modell von Reflexionen abgesehen werden. Der Ansatz $p = p_0 \exp(-\gamma x)$ liefert nach Einsetzen in Gl. (5) für die Fortpflanzungskonstante $\gamma \equiv \alpha + j\beta$ den Wert

$$\gamma = \frac{a}{S} + \sqrt{\left(\frac{a}{S}\right)^2 + \frac{j \omega \varrho b^3 n}{Z S}}. \quad (6)$$

Die Fortpflanzungskonstante ist eine komplexe Größe. Man bezeichnet ihren Realteil α als Dämpfungskonstante, den Imaginärteil β als Phasenkonstante. Die Fortpflanzungskonstante hängt wesentlich von der Membranimpedanz ab. Daneben enthält sie einen reellen Anteil a/S , der von der Querschnittsänderung herrührt. Da im Ohr der Einfluß der Querschnittsänderung gegenüber der Änderung der Membranimpedanz nur eine geringere Rolle spielt, soll bei der Diskussion einiger Sonderfälle einfachheitshalber der Querschnitt als von x unabhängig angenommen werden.

a) Die Membranimpedanz sei ein reiner Federungswiderstand. Man erhält $\gamma = j\omega \varrho F b^3 n / S = j\beta$. Die Kopplungsmassen ϱdx (vgl. später das Er-

satzschaltbild Abb. 2) stellen mit der Federung $F b^3 n dx / S$ ein schwingungsfähiges Gebilde dar, in welchem sich ungedämpfte, fortschreitende Wellen ausbreiten. Ihre Phasengeschwindigkeit ist $V/S \varrho F b^3 n$. Es tritt keine Dispersion auf. Besitzt die Membranimpedanz zusätzlich eine reelle Komponente, so werden die fortschreitenden Wellen gedämpft. Die Dämpfungskonstante bleibt stets kleiner als die Phasenkonstante.

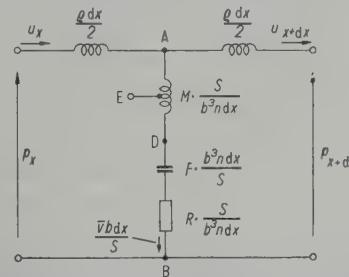


Abb. 2. Ersatzschaltbild eines Elementarstreifens.

b) Die Membranimpedanz sei reell. In

$$\gamma = \frac{1 + j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega \varrho b^3 n}{R S}}$$

werden Dämpfungskonstante und Phasenkonstante gleich groß.

c) Die Membranimpedanz sei ein reiner Massenwiderstand. Es folgt $\gamma = \sqrt{\varrho b^3 n / M S} = \alpha$. Die Phasengeschwindigkeit ist unendlich groß. Sie bleibt endlich, wenn die Impedanz eine zusätzliche reelle Komponente hat. Die Phasenkonstante ist stets kleiner als die Dämpfungskonstante.

Für das Einkanalmodell mit ortsunabhängigem Querschnitt läßt sich ein elektrisches Ersatzschaltbild des Elementarstreifens der Breite dx angeben (Abb. 2). Es entsprechen:

Druck p	der Spannung U
Schnelle u	dem Strom I
Dichte ϱ	der Induktivität $/cm L$
mechanische	der komplexen
Ableitung $/cm b^3 n / Z S$	Ableitung $/cm G$

In der Leitungstheorie erhält man für die Fortpflanzungskonstante $\gamma = \sqrt{R G}$, wobei R den komplexen Längswiderstand und G die Ableitung bedeuten. Diese Formel erweist sich als mit Gl. (6) identisch, da wegen der Vernachlässigung der Zähigkeit $R = j\omega L \triangleq j\omega \varrho$ zu setzen ist. Die Berücksichtigung der Zähigkeitsverluste hätte durch Einschalten eines ohmschen Widerstandes in Serie mit den Längsinduktivitäten $(\varrho/2)dx$ zu erfolgen.

Das Ersatzschaltbild ermöglicht es, die Schwingungsverhältnisse einfach zu übersehen. Man denke sich eine große Anzahl solcher Vierpole, die sich in der Dimensionierung der Querverbindungen unterscheiden, hintereinander geschaltet und von einer Spannungsquelle gespeist. In der Nähe der Anregungsstelle sei die Resonanzfrequenz der Querzweige hoch und werde mit wachsender Entfernung kleiner. Eine Spannungswelle von gegebener Frequenz läuft etwa bis zur Resonanzstelle in die Kette hinein. Dabei steigt ihre Dämpfung wegen des mit wachsender Entfernung geringer werdenden kapazitiven Anteils der Membranimpedanz an, während die Phasengeschwindigkeit sinkt. Der durch die Querwiderstände fließende Strom, welcher der Membranschnelle entspricht, ist einerseits durch die anliegende Spannung, andererseits durch die Größe des Widerstandes bestimmt. Obwohl die Spannungswelle gedämpft ist, steigen die Ströme zunächst an, da die Beträge der Querwiderstände abnehmen. An einer von der Frequenz abhängigen Stelle fließt ein maximaler Querstrom, während hinter dieser Stelle wegen der Dämpfung und des Anwachsens der Querwiderstände die Ströme sehr klein werden. Die Dämpfung der Spannungswelle bewirkt, daß die Stelle maximalen Stromes ein wenig von der Resonanzstelle in Richtung zur Anregungsstelle hin verschoben ist.

Für den mechanischen Eingangswiderstand des Kanals p/u erhält man analog zu der bekannten Formel aus der Leitungstheorie $\bar{Z}_{el} = \sqrt{R/G}$ den Ausdruck

$$\bar{Z}_{mech} = \sqrt{j\omega\varrho ZS/b^3} n. \quad (7)$$

In der Nähe der Anregungsstelle ist die Membranimpedanz für tiefe Frequenzen nahezu eine reine Federung. Für diese Frequenzen ist der Eingangswiderstand reell.

In der Nähe der Resonanzstelle der Membran kommen die Wellenlängen in die Größenordnung der Querdimensionen. Die bei der Ableitung der Differentialgleichung (4) gemachte Voraussetzung, daß der Druck über den Querschnitt konstant ist, ist nicht erfüllt. Die mathematische Behandlung des Problems bietet große Schwierigkeiten. RANKE hat unter der Voraussetzung, daß die Feldgrößen nur von zwei Dimensionen abhängen, das Geschwindigkeitspotential in der Form $F(x \pm jy)$ angesetzt und die Lösung für den Fall großer Kanaltiefe diskutiert. Die Behandlung des Problems hat Ähnlichkeit mit der mathematischen Behandlung der Oberflächenwellen von Flüssigkeiten [8].

Gegeben sei ein rechteckiger Kanal der Tiefe $y = h = \text{const}$, der an drei Seiten schallhart be-

grenzt ist. Die Randbedingung an der vierten Seite wird durch die nur von x abhängige Membranimpedanz bestimmt. Es gelten bei Vernachlässigung der Zähigkeit die Bewegungsgleichungen

$$j\omega\varrho u = -\partial p/\partial x, \quad j\omega\varrho v = -\partial p/\partial y, \quad (8)$$

ferner die Inkompressibilitätsbedingung

$$du/\partial x + \partial v/\partial y = 0.$$

Durch Zusammenfassen dieser Gleichungen erhält man $\Delta p = 0$. Von einer Reflexion am Kanalende sei wieder abgesehen. Der Ansatz $p(x, y) = P(y) \exp(-\gamma x)$ führt auf

$$p(x, y) = p_0 \cos(\gamma y) \exp(-\gamma x). \quad (9)$$

Das Sinusglied in der allgemeinen Lösung der y -Abhängigkeit fällt wegen der an der schallharten Wand erfolgenden Spiegelung fort. Die komplexe Ausbreitungskonstante γ bestimmt sich aus der Randbedingung an der Membran. Das Verhältnis Druck zu wandnormaler Schnelle sei als Membranimpedanz definiert. Von seitlicher Kopplung soll abgesehen werden. Aus den Gl. (9) und (8) ergibt sich

$$\bar{Z}(x) = \left(\frac{p}{v}\right)_{y=h} = \frac{j\omega\varrho}{\gamma \operatorname{tg}(\gamma h)}. \quad (10)$$

Nach Erweitern mit h erhält man die transzendentale Gleichung für die Fortpflanzungskonstante

$$\gamma h \cdot \operatorname{tg}(\gamma h) = \frac{j\omega\varrho h}{\bar{Z}}. \quad (10)$$

Sie ist aus der Theorie der Schallausbreitung in einem mit Schluckstoffen ausgekleideten rechteckigen Kanal bekannt [10], [11]. MORSE hat konforme Abbildungen angegeben, die es ermöglichen, zu einer vorgegebenen Impedanz die Fortpflanzungskonstanten zu ermitteln. Es gibt stets eine unendliche Schar von Lösungen, die benötigt werden, um einen beliebig vorgegebenen Anfangszustand beschreiben zu können, jedoch interessieren nur die niedrigsten Werte, da die höheren stärker gedämpften Wellenzügen entsprechen.

In einer genügend kleinen Umgebung einer Stelle x_0 kann die Impedanz als konstant angesehen werden. Dann ist die Fortpflanzungskonstante aus Gl. (10) berechenbar. Nach Gl. (9) ist der Druck auch von y abhängig; die Ebenenkonstanten Druckes sind gegen die y -Achse geneigt.

Für den Fall großer Wellenlängen kann in Gl. (10) der Tangens durch sein Argument ersetzt werden. Dann geht die Fortpflanzungskonstante in die des eindimensionalen Problems über, wenn man berücksichtigt, daß die Impedanzen in beiden Fällen etwas verschieden definiert wurden. Sie unterscheiden sich um die Dimension einer Fläche.

3. Ähnlichkeitskriterien

Für Modellversuche ist es häufig zweckmäßig, die Abmessungen der ursprünglich betrachteten Anordnung in einem bestimmten Verhältnis zu verändern. Ebenso wird man bestrebt sein, die Frequenzen in ein meßtechnisch bequem zugängliches Gebiet zu legen.

Die beiden Anordnungen sollen sich in entsprechenden Größen nur in den beiden Maßeinheiten unterscheiden.

Also $l_1 = \kappa l_2$, $f_1 = \zeta f_2$, $\eta_1 = \delta \eta_2$, $\varrho_1 = \varepsilon \varrho_2$
(l = charakteristische Länge, f = Frequenz, η = Zähigkeitskoeffizient, ϱ = Dichte).

Sollen in beiden Systemen die gleichen Strömungs- und Druckgesetze gelten, so sind nach der REYNOLDSchen Ähnlichkeitstheorie [8] folgende Beziehungen zu erfüllen:

$$\frac{P_1}{\varrho_1 l_1^2 f_1^2} = \frac{P_2}{\varrho_2 l_2^2 f_2^2} \quad (11)$$

und

$$\frac{\eta_1}{\varrho_1 f_1 l_1^2} = \frac{\eta_2}{\varrho_2 f_2 l_2^2}. \quad (12)$$

Gleichbedeutend mit Gl. (11) sind folgende Transformationen für die Komponenten M , R und F der Membranimpedanz:

$$\frac{M_1}{\varrho_1 l_1^3} = \frac{M_2}{\varrho_2 l_2^3}, \quad (13)$$

$$\frac{R_1}{\varrho_1 f_1 l_1^3} = \frac{R_2}{\varrho_2 f_2 l_2^3}, \quad (14)$$

$$F_1 \varrho_1 f_1^2 l_1^3 = F_2 \varrho_2 f_2^2 l_2^3. \quad (15)$$

Die Dichteänderung der Flüssigkeit geht nur in der ersten Potenz ein und ist daher von geringem Einfluß. Bei vorgegebenem Vergrößerungsverhältnis κ wird die Masse durch Gl. (13) bestimmt. Durch geeignete Bemessung der Federung F kann die Gl. (15) für eine beliebige Frequenztransformation ζ erfüllt werden. Der Reibungswiderstand R ist dann so zu dimensionieren, daß die Gl. (14) befriedigt wird.

Die Berücksichtigung der Zähigkeit in der Perilympe verlangt zusätzlich die Erfüllung der Gl. (12). Das kann durch Wahl einer Flüssigkeit mit geeignetem Zähigkeitskoeffizienten geschehen. Wie von FLETCHER nachgewiesen wurde, ist die Zähigkeit in der Perilympe vernachlässigbar. Die Erfüllung der Gl. (12) ist daher nicht kritisch, solange auch bei den Flüssigkeiten des Modells die Zähigkeit vernachlässigt werden kann.

4. Aufbau der Apparatur

Das Ohrmodell ist als Zweikanalmodell ausgeführt, in den unten beschriebenen Messungen

wurde es jedoch als Einkanalmodell verwendet. Das Modell besteht aus einem Plexiglasgehäuse von 1 cm Wandstärke. Die Grundfläche ist trapezförmig, die Breite nimmt mit der Entfernung von der Anregungsstelle zu (vgl. Abb. 3, 4 und 14). Die äußeren Abmessungen des Modells betragen $38 \times (7-12) \times 9 \text{ cm}^3$. Die Stirnwand wird durch zwei Gummimembranen von 1 mm Stärke gebildet, analog den beiden Fenstern des Innenohres. In Abb. 3 erkennt man links die zur Anregung des Modells dienende Stange, die von einem elektrodynamischen System getrieben wird und an der Anregungsmembran befestigt ist. An der Rückwand befindet sich der Einfüllstutzen für die Flüssigkeit und die Gummidichtung für das Mikrophon. Das Gehäuse kann mit einem Deckel verschlossen werden.

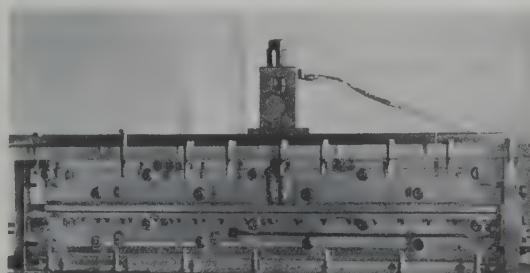


Abb. 3. Das Ohrmodell mit magnetischem Abnahmesystem und Wasserschallmikrophon; seitliche Ansicht.

Die Membran verläuft in der Mitte des Modells. Sie besteht aus einer 1 mm starken Gummiplatte und liegt ungespannt zwischen zwei Metalleinsätzen von je 5 mm Stärke, die durch Schrauben leicht gegeneinander gedrückt werden. Die Einsätze haben eine Ausfräzung, durch welche die Form der Membran bestimmt ist. Sie werden durch Plexiglasstreifen gehalten, die von außen durch Schrauben angezogen werden können. Diese Schrauben sind in den Abb. 3, 4 und 16 (hier als schwarze Flecken) zu sehen. Die Membran ist trapezförmig. Ihre Länge beträgt 32 cm, die Breite in der Nähe der Anregungsstelle 0,72 cm und am „Helicotrema“ 3 cm. In Abb. 4 ist die Membran als dunkle Fläche zu sehen. Sie trägt längs ihrer Mittellinie eine Reihe weißer Scheiben.

Zur Füllung des Modells wird entgastes Wasser verwendet. Es ist darauf zu achten, daß keine Luftblasen im Modell zurückbleiben, da sie Federungsnebenschlüsse zur Membranimpedanz darstellen. Die Füllung des Modells mit einer Glyzerin-Wasser-Mischung brachte keine Änderung gegenüber der Wasserfüllung.

Zur Messung der Schnelle der Membran wurden auf ihr in 1 cm Abstand voneinander kleine Plättchen aus einer Eisen-Nickel-Legierung angebracht. Diese stören die Membranbewegung nicht und erzeugen bei ihrer Bewegung durch Induktion eine Spannung in einem Abnahmesystem. Dieses besteht aus einem kleinen Permanentmagneten von 5 mm Ø, der eine Wicklung von 300 Windungen Kupferdraht trägt. Der Magnet ist durch eine Schraube in seinem Abstand relativ zur Membran verstellbar. Die horizontale Verschiebung geschieht mit Hilfe einer Schwabenschwanzführung, die in dem geschlitzten Deckel des Modells läuft. In Abb. 3 erkennt man auf dem Deckel das Türmchen mit der Verstellschraube, an dem der Magnet befestigt ist. Die Empfindlichkeit der Anordnung ist so groß, daß der Abstand zwischen Magnet und Membran 4...5 mm betragen kann. Bei diesem Abstand konnte keine Rückwirkung auf die Membranbewegung festgestellt werden.

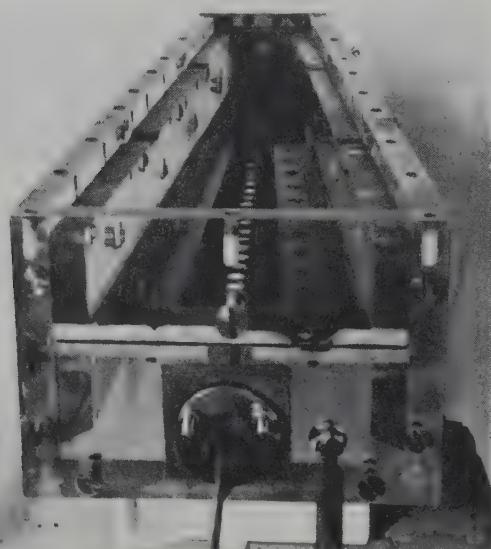


Abb. 4. Das Ohrmodell vom „Helicotrema“ gesehen. Deckel abgenommen; im Vordergrund Mikrophon einführung und Einfüllstutzen.

Die Messung des Druckes geschieht mit einem kleinen Turmalinkristallmikrofon von 7 mm Ø. Es ist an einem dünnen Rohr befestigt und von außen verschiebbar. Eine Gummidichtung an der Rückwand verhindert das Austreten von Flüssigkeit und ein Übersprechen von Körperschall auf die Stange des Mikrofons. Da der Druck beim Einkanalmodell am „Helicotrema“ zusammenbricht, bewirkt diese Gummidichtung keine Verfälschung der Verhältnisse.

Das elektrodynamische Anregungssystem wird von einem Tieftongenerator über einen Verstärker gespeist.

Empfangsseitig werden ein Vorverstärker, $1/3$ -Oktavfilter und ein Anzeigeverstärker verwendet. Die angezeigte Spannung wird außerdem mit einem Neumann-Pegelschreiber in eine gleichphasige Spannung konstanter Amplitude verwandelt, die an die Platten einer Braunschen Röhre gelegt wird. An das andere Plattenpaar schaltet man eine Spannung, die vom Tieftongenerator geliefert wird und mit einem DESGUIN-schen Phasenschieber in bekannter Weise phasenverschoben werden kann. Durch Einstellen der Lissajousfigur auf Phasengleichheit kann die Phasenlage der am Modell gemessenen Spannung bestimmt werden.

5. Meßergebnisse

a) Druckverlauf in der Flüssigkeit

Der Druckverlauf wurde nach Betrag und Phase relativ zum Membranbeginn ($x = 1$ cm) gemessen. Er ist in den Abb. 5 und 6 eingetragen. Die Abszisse stellt die Entfernung von der Anregungsstelle dar; Parameter sind die Frequenzen.

Die Druckamplituden nehmen etwa linear mit dem Abstand von der Anregungsstelle ab und sind an der Resonanzstelle der Membran im Mittel auf 20% ihres Anfangswertes abgefallen. Eine Unstetigkeit in der Nähe der Resonanzstelle wird nicht beobachtet.

Die in den Abb. 5 und 6 eingezeichneten punktierten Linien sind rechnerisch ermittelte Werte. Sie wurden mit den in noch zu besprechender Weise ermittelten Konstanten der Membranimpedanz durch numerische Integration der Differentialgleichung (4) berechnet. Diese Auswertung wurde für die drei repräsentativen Frequenzen 32, 64 und 160 Hz vorgenommen. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ist gut. Mit gleicher Genauigkeit hätten auch in den folgenden Abbildungen die berechneten Werte eingezeichnet werden können, doch wurde davon aus Gründen der Übersichtlichkeit abgesehen.

Die Phasenkurven des Druckes in den Abb. 5 und 6 entsprechen fortschreitenden Wellen, deren Phasengeschwindigkeit mit wachsender Entfernung sinkt. Da das logarithmische Dekrement längs der Membran nahezu konstant ist, und die Querschnittserweiterung des Kanals nur einen geringen Einfluß auf die Fortpflanzungskonstante hat, erreicht jeder Wellenzug an seiner Resonanzstelle den gleichen Wert für die Phasenkonstante. Die Wellenlänge der Druckwelle ist danach für alle Frequenzen an der Resonanzstelle etwa 18 cm.

Die Abb. 7 zeigt den Verlauf der Phasengeschwindigkeit der Druckwelle für verschiedene Frequenzen. Die Werte betragen etwa 45 m/s in der Nähe des Membranfangs und sinken bis auf wenige m/s in der Nähe des Membranendes. Man erkennt, daß praktisch keine Dispersion auftritt.

Aus dem gemessenen Druckabfall läßt sich die Dämpfungskonstante α ermitteln. Sie ist in Abb. 8 in dB/cm als Funktion der Entfernung und der Frequenzen eingezeichnet. Sie erreicht für alle Frequenzen an der Resonanzstelle etwa den glei-

chen Wert $\alpha = 3 \text{ dB/cm}$, entsprechend 54 dB/Wellenlänge. Der Grund für dieses Verhalten der Dämpfungskonstanten ist der gleiche, der zu einer für alle Frequenzen gleichen Wellenlänge an der Resonanzstelle führt.

b) Schnelle der Membran

Die Schnelle der Membran ist in den Abb. 5 und 6 eingetragen. Da Schnelle und Amplitude über die Kreisfrequenz zusammenhängen, kann man die Kurven auch als Amplitudenkurven lesen. An der Resonanzstelle ist die maximale Ampli-

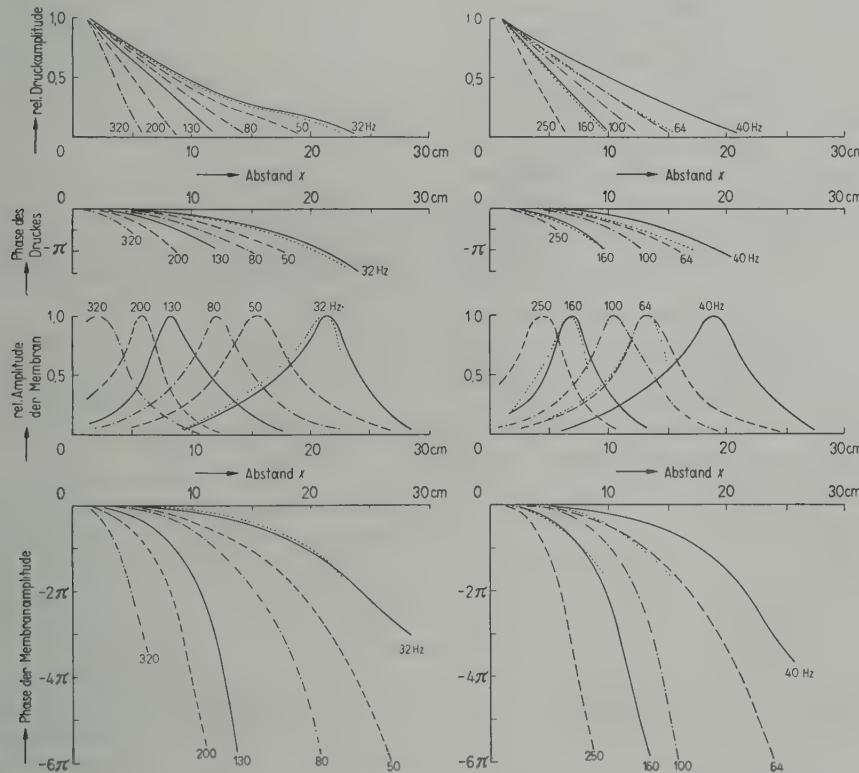


Abb. 5 und 6. Druckverlauf und Schnelle der Membran für verschiedene Frequenzen.
—, ——, ······ gemessene Werte, ······ berechnete Werte.

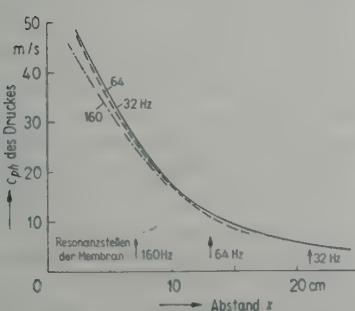


Abb. 7. Phasengeschwindigkeit der Druckwelle für verschiedene Frequenzen.

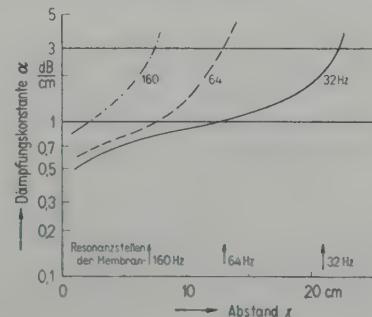


Abb. 8. Dämpfungskonstante α für verschiedene Frequenzen.

tude jeweils auf Eins normiert. Man erhält für die Einfüllenden der Amplitudenkurven die bekannten breiten „Resonanzkurven“. Die eingezeichneten punktierten Linien entsprechen wieder errechneten Werten.

Die Membran ist so bemessen, daß für eine Frequenz von 32 Hz gerade keine Reflexion am Ende mehr entsteht. Das Modell umfaßt einen Frequenzbereich von 32–320 Hz, das sind etwas über 3 Oktaven (Abb. 13).

Die Phasenkurven der Membranschnelle bzw. -amplitude entsprechen fortschreitenden Wellen. Es werden Phasenwinkel von über 5π erreicht. Die Phasengeschwindigkeit der Welle auf der Membran, die kurz als Membranwelle bezeichnet werden soll, ist für die drei Frequenzen 32, 64 und 160 Hz in Abb. 9 eingezeichnet. Es tritt Dispersion auf, die durch die komplexe Membranimpedanz begründet ist. Bei resultierendem Federrungswiderstand eilt die Schnelle dem Druck voraus und bei resultierendem Massenwiderstand nach. Durch diese zusätzliche Phasendrehung zwischen Druck und Schnelle ergibt sich für die Membranwelle eine andere Phasengeschwindigkeit als für die Druckwelle. Die Abweichung zwischen beiden ist besonders groß an der Resonanzstelle, da sich dort der Phasenwinkel stark mit dem Ort ändert. Wie Abb. 9 zeigt, verhalten sich die Phasengeschwindigkeiten für 160 und 32 Hz an der Stelle $x = 12$ cm wie 1 : 4.

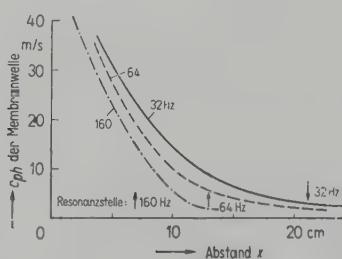


Abb. 9. Phasengeschwindigkeit der Membranwelle für verschiedene Frequenzen.

c) Verhältnis p/v der Membran

Aus den nach Betrag und Phase gemessenen Größen Druck und Schnelle läßt sich das Verhältnis p/v der Membran bestimmen. Es entspricht im wesentlichen der Membranimpedanz. Die Abb. 10 zeigt den Absolutbetrag und Abb. 11 den Phasenwinkel für die drei Frequenzen. Der Betrag fällt mit der Entfernung von der Anregungsstelle stark ab, woran die Membranbreite nicht unwe sentlich beteiligt ist. Es war nach Gl. (3)

$$\frac{p}{v} = \frac{Z}{nb^2}.$$

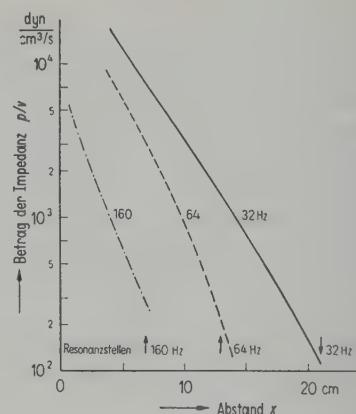


Abb. 10. Betrag der Impedanz p/v für verschiedene Frequenzen.

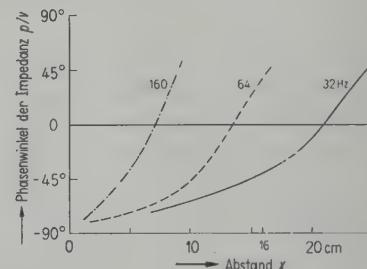


Abb. 11. Phasenwinkel der Impedanz p/v für verschiedene Frequenzen.

Da die Fläche b^2 im Nenner steht, wirkt sie im gleichen Sinne wie die mit wachsender Entfernung kleiner werdende Membranimpedanz Z . Auf diese Weise ändert sich das Verhältnis p/v auch im Modell um einige Größenordnungen. Der Abfall bis zur Resonanzstelle ist so steil, daß die oben beschriebene Verschiebung des Amplitudemaximums der Membran von der Resonanzstelle zur Anregungsstelle hin nur etwa 0,5–1 cm ausmacht. Man kann daher in erster Näherung die Membranimpedanz an der Stelle maximaler Auslenkung als reell ansehen.

d) Experimentelle Bestimmung der Konstanten der Membranimpedanz

Die Federung wurde statisch durch Auflegen von Gewichten und Messung der Membranbiegung bestimmt. Sie ist in Abb. 12 für die 1 mm starke Gummimembran als Funktion der Entfernung von der Anregungsstelle aufgetragen. Ihre Größenordnung beträgt 10^{-6} cm/dyn.

Da der Ort maximaler Membranauslenkung als Funktion der Frequenz bekannt ist (Abb. 5, 6 und 13), kann mittels der Beziehung $\omega_{Res} = 1/MF$ die schwingende Masse berechnet werden. Sie hat die Größenordnung 1 g und ist in Abb. 12 mit

eingezzeichnet. Sie ergibt sich proportional zu $b^{3,2}$ und entspricht damit ungefähr der Rechnung von FLETCHER, der ein Anwachsen mit b^3 angenommen hat. Die Membranmasse, die nur b^2 proportional ist, beträgt im Mittel nur $1/6$ der Gesamtmasse.

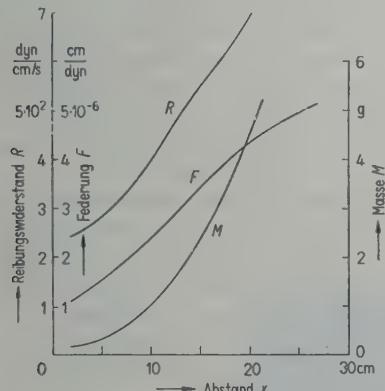


Abb. 12. Verlauf des Reibungswiderstandes, der Federung und der Gesamtmasse der Membranelemente.

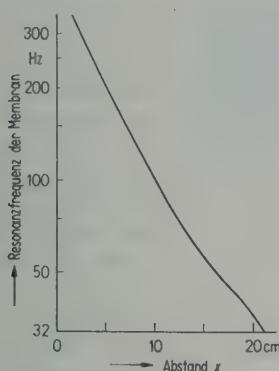


Abb. 13. Die Resonanzfrequenz der Membran als Funktion des Abstandes von der Anregungsstelle.

Der Reibungswiderstand ergibt sich aus der „45°-Verstimmung“. Aus der Abb. 11 ersieht man, daß z. B. an der Stelle $x = 16$ cm eine Frequenzänderung $\Delta f = 32$ Hz notwendig ist, um den Phasenwinkel der Membranimpedanz um $\pm 45^\circ$ zu verändern. Man erhält an dieser Stelle ($f_{\text{Res}} = 50$ Hz) eine relative Halbwertsbreite $\Delta f/f = 0,64$. Das entsprechende logarithmische Dekrement beträgt 2,1. Es wurde für verschiedene Stellen der Membran bestimmt, wobei sich Werte zwischen 2 und 2,1 ergaben. Ähnlich den Verhältnissen im Innenohr ist also das Dekrement längs der Membran fast konstant. Unter Zu- grundelegung eines Dekrementes von 2 wurde der zugehörige Reibungswiderstand mittels der bekannten Beziehung für die 45°-Verstimmung

berechnet und gleichfalls in Abb. 12 eingezeichnet. Der Reibungswiderstand hat die Größenordnung 10^2 dyn/cm · s⁻¹.

Mit den Werten nach Abb. 12 wurden die berechneten Kurven der Abb. 5 und 6 gewonnen.

e) Eingangsimpedanz des Modells

Die mechanische Eingangsimpedanz des Modells wurde durch Messung der elektrischen Rückwirkung beim Ansetzen des Modells an ein Vibrometer bestimmt [13]. Sie ergab sich in Übereinstimmung mit der Rechnung (Gl. (7)) reell und wenig frequenzabhängig $p/u = 5,5 \cdot 10^3$ dyn · cm⁻² / cm · s⁻¹. ZWISLOCKI berechnete den Eingangswiderstand des Ohres zu $9 \cdot 10^3$ dyn · cm⁻² / cm · s⁻¹. Reduziert man dieses Ergebnis durch Einsetzen des halben Impedanzwertes für die Basilarmembran auf das Einkanalmodell, so erhält man $6,4 \cdot 10^3$ dyn · cm⁻² / cm · s⁻¹. Auf den Zusammenhang zwischen diesem und dem am Modell gemessenen Wert wird weiter unten noch eingegangen.

Bei sehr tiefen Frequenzen ist für den Eingangswiderstand des Modells die Federung der Anregungsmembran ausschlaggebend, so daß die Impedanz dann Federungscharakter annimmt.

f) Flächen konstanten Druckes

Im Gebiet hinter der Anregungsstelle sind die Flächen konstanten Druckes zunächst eben und stehen auf der Längsachse des Modells senkrecht. Bei Annäherung an die Resonanzstelle neigen und krümmen sich die Flächen, wie es in Abb. 14 z. B. für 50 Hz und die Koordinaten $x = 10$ und 16 cm eingezeichnet ist. Die Krümmung kommt

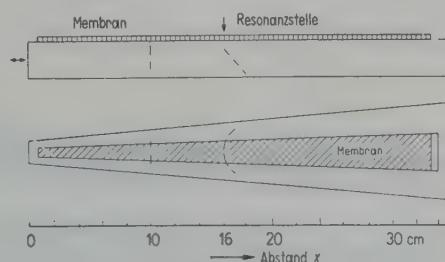


Abb. 14. Die Flächen konstanten Druckes (---) für die Frequenz 50 Hz. Oben: schematische Seitenansicht des Modells; darunter Aufsicht.

dadurch zustande, daß die Membran nicht den ganzen Querschnitt des Modells ausfüllt. Es entsteht auch ein Druckgradient in z -Richtung, und das Problem wird dreidimensional. Aus diesem Grunde und wegen der Querschnittsänderung des Kanals kann die zweidimensionale Lösung Gl. (9) für das Modell nur näherungsweise gelten. Sie

gibt für den Fall $\gamma h = 1$ eine Phasenverschiebung von 50° zwischen dem Druck in Membran- und in Bodennähe.

Experimentell wurden folgende Phasenunterschiede festgestellt; z. B.

$$f = 50 \text{ Hz} \text{ an der Stelle } x = 16 \text{ cm: } 50^\circ, \\ f = 100 \text{ Hz} \text{ an der Stelle } x = 10 \text{ cm: } 30^\circ.$$

Die Phasendifferenzen lassen sich auch an Hand des Ersatzschaltbildes Abb. 2 verstehen. Die Druckmessung in größerer Entfernung von der Membran, also gewissermaßen außerhalb der mitschwingenden Flüssigkeitsmasse, entspricht der Spannungsmessung zwischen den Punkten A und B. Geht man mit dem Mikrofon unmittelbar an die Membran heran, so entspricht das einer Messung zwischen D und B. Man erhält zwischen beiden Spannungen einen leicht angebaren Phasenunterschied. Wegen der endlichen Größe des Mikrofons ist es nicht möglich, den Druck unmittelbar an der Membran zu messen. Man erhält gute Übereinstimmung zwischen gemessenen und berechneten Werten mit der Annahme, daß das Mikrofon bis in die Mitte der mitschwingenden Masse herangeführt werden kann. Die Messungen entsprechen somit den Spannungen zwischen A und B, und zwischen E und B. Die Phasenunterschiede zwischen diesen bezeichneten Punkten nehmen erst dann größere Werte an, wenn die Massen- und die Federungskomponente der Membranimpedanz die gleiche Größenordnung haben. Das ist in der Nähe der Resonanz der Fall.

g) Membranauslenkung, Flüssigkeitswirbel

Die Abb. 15 zeigt vier verschiedene Phasenlagen der Membranauslenkung bei einer Frequenz von 32 Hz. Die Membran wurde von der Seite aus geringer Höhe photographiert und ist als

trapezförmige dunkle Fläche erkennbar. Sie trägt einen weißen Farbstrich längs der Mittellinie, um die Wellenbewegung besser sichtbar zu machen. Als Bezugslinie wurde ein weißer Zwirnsfaden in 5 mm Höhe über der Membran ausgespannt. Die fortschreitenden Wellen laufen auf den Bildern von links nach rechts. Man erkennt das Amplitudenmaximum und die nach rechts kleiner werdende Wellenlänge. Im oberen Teil der Bilder sind die Schrauben andeutungsweise zu sehen, welche die Metalleinsätze, zwischen denen die Membran liegt, aufeinanderdrücken. Sie haben einen gegenseitigen Abstand von 2 cm.

G. v. BÉKÉSY beobachtete im Ohr und in Modellversuchen an der Resonanzstelle einen Flüssigkeitswirbel, der in solchem Sinne rotiert, daß die Flüssigkeit in der Nähe der Membran in Fortschreibungsrichtung der Welle fließt. ZWISLOCKI beschrieb diesen Effekt durch Berücksichtigung der quadratischen Glieder in den hydrodynamischen Gleichungen.

Um den Wirbel sichtbar zu machen, wurden dem Wasser Aluminiumflitter zugesetzt. Die Beleuchtung der Flitter geschah mit einem Lichtbündel geringer Breite, um nur die Teilchen in der Mittelebene des Modells aufzuleuchten zu lassen. Eine Einengung des Flüssigkeitsvolumens war nicht notwendig. Die Aufnahmen erfolgten senkrecht zum Lichtbündel. Man erkennt in der Abb. 16 die von außen sichtbaren Schrauben des Modells als dunkle Flecke. Die Länge der Bilder entspricht 15 cm. An den oberen Bildkanten ist der Metalleinsatz als dunkler Streifen zu sehen. Die Membran liegt auf den Bildern oberhalb dieser Kante. Die Anregungsstelle befindet sich links, die Wirbel rotieren im Uhrzeigersinne. Man erkennt, daß der Wirbel für höhere Frequenzen näher an der Anregungsstelle liegt. Die Wirbel entsprechen Frequenzen von 40 und 80 Hz.

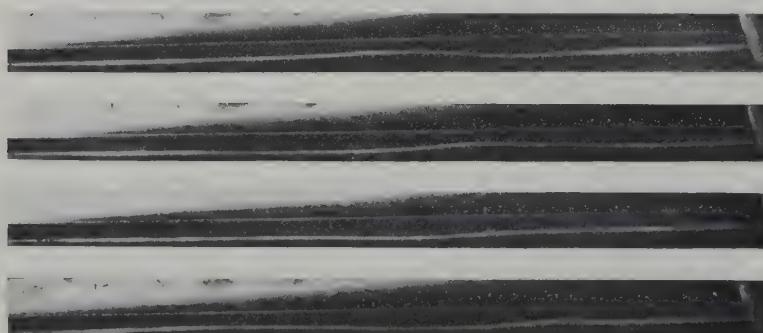


Abb. 15. Vier Phasenlagen der Membranauslenkung; Frequenz 32 Hz. Membran von der Seite unter einem Erhebungswinkel von 30° photographiert. Laufrichtung der Welle von links nach rechts. Zwirnsfaden in 5 mm Höhe über der Membran als Bezugslinie. Belichtungszeit 1/1000 s.

6. Ähnlichkeit zwischen Ohr und Modell

Abschließend sei noch kurz die Ähnlichkeit zwischen den Verhältnissen im Innenohr und dem Modell diskutiert.

Für den linearen Vergrößerungsmaßstab ist das Verhältnis der Membranbreiten ausschlaggebend. Die Breite der Modellmembran ändert sich stärker mit der Entfernung als dies bei der Basilar-

membran der Fall ist. Der mittlere Vergrößerungsmaßstab des Modells beträgt 55.

Beim Vergleich der Stellen $\xi = 1,5$ cm (Entfernung vom Steigbügel im Ohr)

und $x = 16$ cm

(Entfernung von der Anregungsstelle im Modell) ergibt sich, daß die Werte für beide Seiten der zu erfüllenden Ähnlichkeitsbedingungen Gl. (11) um 12% verschieden sind. Zum Vergleich wurden für das Ohr die von FLETCHER angegebenen Werte

$$M_1 = 10^{-5,31 + 0,5\xi}, \quad F_1 = 10^{0,94\xi - 5,07}$$

$$R_1 = 0,5 (M_1/F_1)^{1/2}$$

herangezogen. Die aus diesen Werten gebildete Impedanz der Basilmembran wurde mit ihrem halben Wert eingesetzt, um die Verhältnisse auf das Einkanalmodell zu übertragen. Der Index 1 soll für Größen des Ohres, der Index 2 für Größen des Modells gelten.

Stimmen die Ähnlichkeitsbedingungen in beiden Systemen überein, so gilt das gleiche für den Ausdruck γh , worin h eine charakteristische Länge ist. Der Verlauf der Dämpfung und der Phasengeschwindigkeit ist ähnlich, das Verhältnis Wellenlänge zu Kanaltiefe in beiden Fällen gleich.

Für die beiden miteinander verglichenen Stellen des Ohres und des Modells gilt $l_2/l_1 = 55$, ferner das Frequenzverhältnis $f_2/f_1 = 1/40$. Daher stimmen die entsprechenden Geschwindigkeiten $l_1 f_1 = 0,73 l_2 f_2$ der Größenordnung nach überein; ferner wegen Gl. (11) auch die Verhältnisse Druck zu Geschwindigkeit.

So erklärt sich die numerische Übereinstimmung der Phasengeschwindigkeiten in Abb. 7 mit den von v. BÉKÉSY gemessenen Werten. G. v. BÉKÉSY maß in der Nähe des Steigbügels Phasengeschwindigkeiten von 45 m/s, die mit wachsender Entfernung bis auf einige m/s abfielen.

Ferner findet hier die zunächst zufällig erscheinende Übereinstimmung der Eingangsimpedanz des Modells mit der von ZWISLOCKI berechneten Impedanz ihre Begründung.

Im Modell ändert sich die Federung der Membran nicht so stark mit der Entfernung wie dies im Ohr der Fall ist. Daher bleibt die Ähnlichkeit zwischen Ohr und Modell nicht über die ganze

Länge erhalten. Man könnte daran denken, die Federung durch eine allmählich dünner werdende Membran noch stärker veränderlich zu machen. Will man jedoch das Ohr in allen Teilen ähnlich vergrößern, so würde eine 55fache Vergrößerung schon ein 1,8 m langes Modell bedeuten.

Es wurde daher davon abgesehen, das Modell in seiner ganzen Länge dem Ohr ähnlich zu machen, sondern ein Modell konstruiert, das in einem gewissen Bereich die Ähnlichkeitsgesetze erfüllt und darüber hinaus qualitativ richtig ist.

Herrn Prof. Dr. E. MEYER danke ich für sein förderndes Interesse an der Arbeit und für zahlreiche wertvolle Ratschläge.

(Eingegangen am 1. Oktober 1953.)

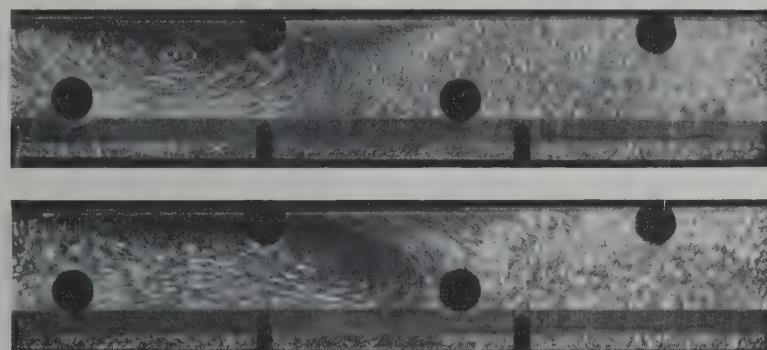


Abb. 16. Aufnahmen des Flüssigkeitswirbels für eine Frequenz von 80 Hz (oberes Bild) und 40 Hz (unteres Bild). Laufrichtung der Welle von links nach rechts. Rotation der Wirbel im Uhrzeigersinn. Membran befindet sich einige Millimeter über dem oberen Bildrand. Belichtungszeit 25 s.

Schrifttum

- [1] BÉKÉSY, G. von, Phys. Z. **29** [1928], 793. Akust. Z. **7** [1942], 173. Akust. Z. **8** [1943], 66. J. acoust. Soc. Amer. **19** [1947], 452.
- [2] RANKE, O. F., Akust. Z. **7** [1942], 1. Z. Biol. **103** [1950], 409. J. acoust. Soc. Amer. **22** [1950], 772.
- [3] ZWISLOCKI, J., Acta otolaryng., Suppl. **72** [1948]. J. acoust. Soc. Amer. **22** [1950], 778. J. acoust. Soc. Amer. **25** [1953], 743.
- [4] PETERSEN, L. C. und BOGERT, B. P., J. acoust. Soc. Amer. **22** [1950], 369.
- [5] FLETCHER, H., J. acoust. Soc. Amer. **23** [1951], 637.
- [6] DORENDORF, H., Staatsexamenarbeit im I. Physikalischen Institut der Universität Göttingen 1950.
- [7] BOGERT, B. P., J. acoust. Soc. Amer. **23** [1951], 151.
- [8] SOMMERFELD, A., Vorlesungen über Theoretische Physik, Band II: Mechanik der deformierbaren Medien. Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1947.
- [9] WEBSTER, A. G., Proc. nat. Acad. Sci. Wash. **5** [1919], 275.
- [10] CREMER, L., Die wissenschaftlichen Grundlagen der Raumakustik, Bd. III. S. Hirzel Verlag, Leipzig 1950.
- [11] MORSE, P. M., J. acoust. Soc. Amer. **11** [1939], 205.
- [12] SIVIAN, L. J., J. acoust. Soc. Amer. **9** [1937], 135.
- [13] NUKIYAMA, H. und MATSUDEIRA, M., Proc. Inst. Acad. Tokio **2** [1926], 410.

SOME REMARKS ON THE ANALYSIS OF MAGNETOSTRICTIVE TRANSDUCERS

by H. NØDTVEDT

Norwegian Defence Research Establishment, Horten (Norway)

Summary

The electro-mechanical coupling constant of magnetostrictive vibrating rods is calculated from basic physical constants. The formula given is valid for both fundamental and higher harmonics. The calculated values are compared with directly measured coupling constants. Next, the electric analogue of rods is given, and it is shown how a graphical analysis of admittance and impedance diagrams gives convenient rules for evaluating the relevant quality factors. Actual measurements on a particular specimen are included.

Sommaire

On calcule, à partir des constantes physiques fondamentales, le coefficient de couplage électromagnétique des tiges vibrant par magnétostriiction. La formule établie est valable à la fois pour la fréquence fondamentale et pour les harmoniques d'ordre élevé. On compare les coefficients de couplage ainsi calculés avec ceux mesurés directement. On indique ensuite l'équivalent électrique d'une tige et on montre qu'une étude graphique des diagrammes d'admittance et d'impédance permet d'établir des règles de détermination des facteurs affectant la qualité. On donne enfin les résultats de mesures faites sur une éprouvette.

Zusammenfassung

Der elektro-mechanische Kopplungsfaktor für stangenförmige Magnetostriktionsschwingen wird aus den fundamentalen physikalischen Konstanten berechnet. Die angegebene Formel gilt sowohl für die Grundschwingung als auch für höhere Harmonische. Die berechneten Werte werden mit gemessenen verglichen. Weiterhin wird ein elektrisches Ersatzschaltbild für die Schwingen angegeben, und es wird gezeigt, wie man durch graphische Auswertung der Admittanz- und Impedanzkurven die Güte bestimmen kann. Für ein spezielles Beispiel sind Messungen angegeben.

1. Introduction

Although the magnetostrictive transducer has achieved a considerable importance in practice, particularly in underwater acoustics, it cannot be said that the theory is developed to the same extent as is the case with the piezoelectric transducer. In most treatments on magnetostrictive transducers, the paper by BUTTERWORTH and SMITH [1] is usually referred to when dealing with the underlying principles. This paper considered the ring-shaped transducer, excited in its fundamental radial mode, and an equivalent electric analogue was worked out, together with an expression for the electromechanic coupling coefficient, from the differential equations of the system. The ring-shaped transducer was characterised by having a closed magnetic circuit, and by having all elements round a periphery moving with the same amplitude and in the same phase. The electro-mechanical coupling coefficient was, in this particular case, expressed by the physical constants of the material only. Since the appearance of the paper mentioned, several transducer types have been developed, which show neither of the two characteristics. Longitudinally vibrating rods, for instance, exhibit varying amplitude

and phase relations along their lengths, and they have an external magnetic resistance which cannot be neglected. We shall see that more general expressions for the electro-mechanical coupling may be given for these cases.

The electric network analogues which can be substituted for the magnetostrictive vibrating system are of great value in design and measurement of transducers. It is felt, however, that full use of these analogues has not been made, and that principles and methods used in other fields of electrical engineering may be adopted to increase their usefulness. In the following we will show that graphical methods, applied to the admittance and impedance loci, will yield the determining factors of the transducer, more quickly and easily than an analysis of the algebraic equations.

2. Electro-mechanical coupling relations

The electro-mechanical coupling coefficient expresses to what extent the vibrating mechano-acoustic system is coupled by the magnetostrictive effect to the attached electric network, and is the most important quality factor of the transducer. The more the coupling factor exceeds

its minimum value, determined by the losses in the electric and mechano-acoustic parts, the more efficient is the energy conversion of the transducer. The bandwidth over which it may be used efficiently, depends on the ratio of the actual and the minimum coupling value. An evaluation of this quality factor is therefore of interest.

This evaluation is usually carried out by determining the electric analogue and then giving the coupling coefficient as the square root of the ratio of the two inductances appearing in the network. The coefficient can, however, be found directly, if we consider the energy conditions in the combined electro-mechanical system. The electro-mechanic coupling coefficient may be defined as the square root of the ratio of the magnetic energy stored in the system, to the stored mechanical energy present. Applying this point of view first to the ringshaped transducer, vibrating in its fundamental mode, we obtain the stored mechanical energy (when it is all in potential form) in a circumferential element of length ds as:

$$dW_{\text{mech}} = \frac{1}{2} EA \left(\frac{\xi}{s} \right)^2 ds$$

where E is the elastic modulus of the material, A the cross-section of the ring, ξ the vibrational amplitude (with reference to change of circumference) and s the circumference corresponding to the average diameter of the ring.

The magnetically stored energy in the same element is given by:

$$dW_{\text{magn}} = A \frac{BH}{8\pi} = A \frac{\mu \kappa^2}{8\pi} \left(\frac{\xi}{s} \right)^2 ds,$$

where κ is the inverse magnetostrictive constant connecting the developed magnetic field H with the relative change of length, according to the equation:

$$H = \kappa \frac{\xi}{s},$$

while μ is the permeability of the material.

Evaluating the coupling coefficient from the energy ratio, we obtain:

$$k = \sqrt{\frac{W_{\text{magn}}}{W_{\text{mech}}}} = \sqrt{\frac{\kappa^2 \mu}{4\pi E}} = \sqrt{\frac{\kappa \lambda \mu}{E}}$$

where $\lambda = \kappa/4\pi$, the magnetostrictive constant. The expression for the coupling coefficient is identical with that evaluated by BUTTERWORTH and SMITH.

Dealing with vibrating rods, the conditions are somewhat different. We will consider a magnetostrictive rod of length l in a medium, excited in a longitudinal vibration by, for ins-

tance, an incoming sound wave of angular frequency ω . The displacements of the elements along the rod can then be written as:

$$\xi = \xi' \cos \frac{\omega}{c} (l - x)$$

where c is the sound velocity in the rod, and x is the distance from the excited end, the other end being free. We will for the sake of simplicity assume that the rod has a cross-sectional area of 1 cm^2 , and we will further assume that there is a steady polarising field B_0 along the length of the rod. The effect of this field is to make the connection between the superimposed alternating field and the mechanical displacements unambiguous. It does not enter into the subsequent evaluation.

Since the alternating field developed by the vibration at any point along the length of the rod is given by $d(\Delta H) = \kappa (d\xi/dx) dx$, the resulting field is determined by the relative displacement of the two ends. The difference in displacements at $x=0$ and $x=l$ is easily found to be:

$$\xi_l - \xi_0 = \xi' \left(1 - \cos \frac{\omega}{c} l \right).$$

Consequently, the developed induction is given by:

$$\Delta B = \mu \kappa \frac{\xi'}{l} \left(1 - \cos \frac{\omega}{c} l \right)$$

where μ now is the effective permeability of the rod and not that of the material.

The expression for the alternating magnetic field has maxima for $\omega = (2n+1)\pi c/l$, i. e. for the fundamental and all odd harmonic modes. For even harmonic modes, no magnetic field will be developed by the vibrations.

Calculating the magnetically stored energy in the rod in the odd modes, we obtain:

$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{8\pi} \int_0^l \Delta B \Delta H dx = \frac{\mu \kappa^2 \xi'^2}{2\pi l}$$

while the mechanical energy stored in potential form is found from:

$$W_{\text{mech}} = \frac{1}{2} E \int_0^l \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{4} E \xi'^2 \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{l}.$$

Again evaluating the coupling factor from these energy ratios, we arrive at the formula:

$$k = \frac{2\sqrt{2}}{(2n+1)\pi} \sqrt{\frac{\kappa \lambda \mu}{E}}.$$

This formula contains the expression for the coupling factor of a vibrating ring, but has an additional factor due to the variation of displacement along the direction of vibration. The reducing effect of this factor will, in the fundamental mode, be $(2\sqrt{2})/\pi = 0.9$, but will in the higher modes have a much more serious effect.

How the difference in coupling values at the even and odd modes may be used to separate the $\Delta-E$ effect appearing in some ferromagnetic materials, from their magnetostrictive effect, has been shown in an earlier paper [2].

The evaluated formula will now be verified by experiments. A rod of length 10 cm and with a cross-section $1 \times 1 \text{ cm}^2$ is built up of annealed nickel stampings by using some sort of cement. The physical constants contained in the coupling formula, i. e. the permeability μ and the magnetostrictive constant λ , are then measured, and the value of the coupling constant found from the formula. Afterwards, the coupling factor will be measured directly by examining the impedance conditions at the terminals of a surrounding coil.

Since we have assumed a polarising field to be present, μ and λ will be incremental values. Although incremental values for the permeability of nickel are given in various handbooks, we prefer to measure this constant on the specimen in question, since magnetic constants have a tendency to vary considerably with heat treatment and cold working.

Confining our attention to the coupling conditions at the fundamental frequency of the rod, the incremental permeability should be measured at this particular frequency. The vibrations of the resonant rod will, however, influence the magnetic measurements, unless a complete mechanical clamping of the rod is obtained. This being difficult, it is more practical to do the measurement for two frequencies—one a little below and one above. The values for the incremental permeability of the rod given in Fig. 1 are obtained by taking the average of two such measurements.

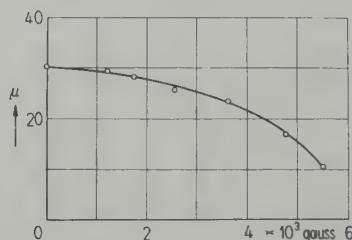


Fig. 1. Incremental permeability of nickel rod versus polarising induction.

Curves for the variation of length with magnetic field or induction are given in several books on magnetism, but values for the incremental change of length with varying polarising field are scarce and none seem to be available for nickel. The assumption that the incremental value of λ is equal to the slope of the static curve

does not seem to be justified. It appears that a difference exists and the constant has to be measured directly. This is done by using a C. E. Johansons Mikrokator which is able to measure mechanical displacements less than 10^{-4} mm . By superposing a small incremental induction on polarising fields of varying magnitude, the curve in Fig. 2 is obtained.

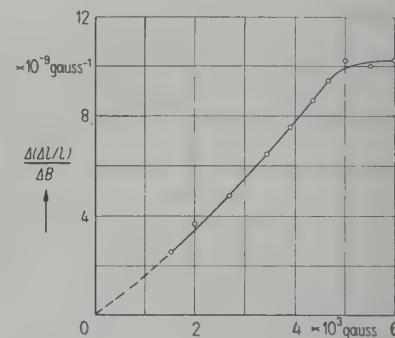


Fig. 2. Relative incremental deformation of nickel rod, versus polarising induction ($\lambda = E \cdot \Delta (AL/l) / \Delta B$).

As is shown, there appears to be a saturation value for the incremental magnetostrictive constant, something that would be rather difficult to discern from the static curve. Usually the static change of length is supposed to vary quadratically with the magnetic field, giving a linear increase in the incremental value with increasing polarising fields.

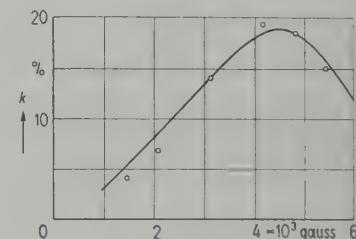


Fig. 3. Coupling coefficient of nickel rod versus polarising induction (○ are directly measured values).

The third factor in the formula for the coupling coefficient, the elasticity modulus, may safely be taken out of handbooks as being $2.1 \times 10^{12} \text{ dynes/cm}^2$, and inserting the three constants, we obtain the curve in Fig. 3 for the coupling coefficient of the rod as a function of the polarising field. This curve will now be checked by direct measurements at the terminals of a coil surrounding the rod. We will then use the method given by ROUND [3]. In short, this is based on the fact that the impedance of a magnetostrictive transducer, tuned with a capacitance at its resonant

frequency, exhibits three resistive positions around this frequency. One of these positions will be at the actual resonance frequency f_0 , the other two will be displaced by $\pm \Delta f$ respectively. The coupling coefficient is then quite simply given by $2\Delta f/f_0$. Carrying out this measurement on the rod, we obtain the values indicated in Fig. 3. It appears that good agreement exists between the two methods of evaluating the coupling coefficient.

3. Electric analogues

Having worked out the general expression for the coupling constant, it is easy to determine the electric network corresponding to the magnetostrictive rod. It is apparent from the preceding section that excitation of the rod in higher harmonics is not to be recommended if good conversion efficiency is required. We will therefore confine ourselves to the fundamental mode, although analogues for the higher modes may be evaluated in the same way.

Still considering longitudinal vibrations only, the impedance offered by a rod to an incoming sound wave, is given by:

$$Z_{\text{mech}} = \frac{\text{velocity}}{\text{pressure}} = j \frac{1}{\rho c} \cot \frac{\omega}{c} l$$

(ρ being the density of the rod) using the so called mobility or electro-magnetic system of equivalents. This system must be used when dealing with magnetostrictively coupled transducers, as pointed out by MILES [4].

Considering first the non-magnetostrictive rod, it is easy to show that Z_{mech} around the fundamental resonance is closely approximated by the impedance of an electric parallel circuit, where the capacitance is given by $C_{\text{mech}} = \rho l/2$, i. e. half the weight of the rod, and the inductance by $L_{\text{mech}} = 2l/\pi^2 E$, i. e. $2/\pi^2$ times the static compliance of the rod. In this network, the vibrational energy will alternately be stored in elastic and motional form.

Assuming now the rod to be magnetostrictive, there must be a storage element in the analogue for the magnetic energy $k^2 W_{\text{mech}}$. We obtain a network expressing this physical condition by adding an inductance $k^2 L_{\text{mech}}$ to the purely "mechanical" inductance evaluated. Consequently, we get the network given in Fig. 4a, as represent-

ing the vibrating magnetostrictive rod. It will be noticed that no mention has been made of any surrounding coil in this evaluation of an electric analogue. The rod is, in itself, an electro-mechanical system where both mechanical and electromagnetic quantities must appear, if an analogue is worked out.

The rod has up to now been assumed loss free. In practical cases, losses occur due to inner friction in the material and to radiation of sound into the surrounding medium. These losses may be represented by a resistance across the terminals of the condenser in the analogue. The value of this resistance will, in addition to the inner friction in the material, depend on the acoustic impedance of the medium, and on the area of the radiating end in relation to the wavelength of the transmitted sound.

If no magnetic leakage is assumed, a coil surrounding the rod will appear in the analogue as an inductance closely coupled to the magnetostrictive inductance $k^2 L_{\text{mech}}$. The value of this purely electric inductance is worked out from the standard formula for inductances, i. e. $L_{\text{el}} = 4\pi N^2 \mu l$ (N being the number of turns), and the losses due to eddy currents may be taken into account by adding a parallel resistance across the terminals. The complete network equivalent for a magnetostrictive rod transducer finally takes the form given in Fig. 4b, where all components are given by basic physical constants.

4. Analysis of admittance and impedance diagrams

The analogue given in Fig. 4b is a little inconvenient to analyse graphically, due to the parallel combination of the capacitance and resistance. Since most magnetostrictive transducers are highly resonant, we may without any great error replace the parallel combination by a series RC branch. If we, in addition, replace the electro-mechanical transformer by its equivalent, we obtain a network of the type given in Fig. 4c, which is more suitable for practical purposes.

Using well-known methods, as outlined for instance by M.I.T. [5], the admittance diagram of Fig. 4c is evaluated. Inverting the line representing the impedance of the $R' L' C'$ combination [$Z' = R' + j(\omega L' - 1/\omega C')$], we obtain the circle around M in Fig. 5, where o is the origin. The admittance of the electric branch ($R'_{\text{el}} L'_{\text{el}}$) may be added by moving the origin to O, where $OA = 1/\omega L'_{\text{el}}$ and $AO = 1/R'_{\text{el}}$. This latter admittance will vary with frequency, although this variation is small compared to that taking place in the

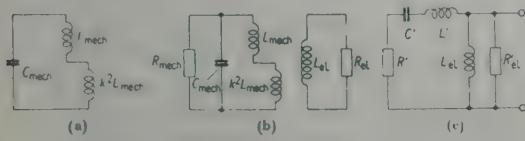


Fig. 4. Electric analogues of nickel rod.

mechanical branch, if the rod is vibrating in air. If the rod is in a medium of less acoustic mobility, however, this variation must be taken into account. As is shown for instance by BERANEK [6, p. 353], the contribution of the mechanical branch may be separated, by assuming the electric admittance to vary regularly through the resonance point. The motional impedance circle can then be constructed by plotting the vectorial difference between the admittance actually measured, and the value of the electric admittance at each particular frequency. When this operation is carried out, we obtain an admittance diagram of the type given in Fig. 5, such that we may confine ourselves to a treatment of this.

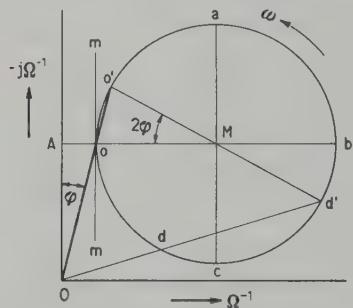


Fig. 5. Evaluation of admittance diagram for magnetostrictive transducer.

The point b in Fig. 5 obviously corresponds to the resonance frequency of the rod, since the mechanical capacitance and inductance cancel at this point. At the point a and c the reactive component of the motional admittance is equal to the resistive, and we obtain the expression for the mechanical Q -value of the rod as:

$$Q_{mech} = \frac{f_b}{f_a - f_c}.$$

The Q -value of the coil itself is of course given by the ratio of the electric resistance to the inductance.

The electric energy absorbed by the network in Fig. 5 for any frequency around the resonance point is proportional to the distance from the ordinate axis to the point on the circle at the particular frequency. The ordinate axis may therefore be considered as the locus of the points in the plane with zero absorbed energy.

Assuming that the vector $\vec{O}o$ is the value of the electric admittance at resonance, and that we consider a limited band around this frequency, the energy absorbed by the mechanical branch in the network is proportional to the distance from the line $m-m$ to points on the admittance

circle for the various frequencies. The line $m-m'$ can consequently be looked upon as the locus for the points in the plane with zero mechanically converted energy. The idea of loci for various energy conditions will be useful when we later consider the impedance diagram.

The maximum electro-mechanical conversion efficiency occurs at the resonance point b , and can be expressed as the ratio:

$$\eta_{mech} = \mathbf{ob}/\overline{\mathbf{Ab}}$$

The admittance diagram is convenient to analyse. When, in spite of this, the impedance diagram is usually adopted in practice, it may be because the impedance concept is more familiar to engineers, and because the majority of bridges are of the impedance type.

The principle of analysis can, however, also be applied to the impedance locus and, although the evaluation is a little more complicated, the quality parameters of the transducer are just as easily taken out of the finished diagram.

The impedance of the circuit in Fig. 4c can be written as:

$$Z = Z'_{el} - \frac{Z'^2_{el}}{Z'_{mech} + Z'_{el}}$$

Introducing $Z'_{el} = |Z'_{el}| e^{j\left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right)}$ where $\varphi = \tan^{-1}(\omega L'_{el}/R'_{el})$ is the loss angle of the coil, we can write:

$$Z = Z'_{el} + \frac{|Z'_{el}|^2 e^{j2\pi f}}{Z'_{mech} + Z'_{el}}.$$

The locus of the vector expressed by the second term is given by the circle around M , inclined at an angle 2φ to the horizontal in Fig. 6. The impedance of the electric branch is again added by moving the origin from o to O , where \overline{Oo} is the impedance of R'_{el} and L'_{el} . The same considerations must be applied regarding the variation in Z'_{el} , as was necessary when dealing with the admittance diagram.

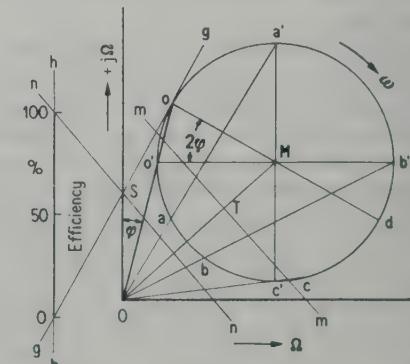


Fig. 6. Evaluation of impedance diagram for magnetostrictive transducer.

We will now show how the relevant points in the diagram may be found. Assuming that the two diagrams in Figs 5 and 6 represent the same circuit, one diagram must be the inversion of the other, by definition, i. e. the impedance diagram can be inverted into the admittance diagram, and vice versa. By choosing the constant of inversion properly, the two diagrams may be made to coincide. Consequently, the point o in Fig. 5 corresponds to point o in Fig. 6, the point a in Fig. 5 to the point a in Fig. 6, etc. We can therefore find the point corresponding to resonance in the impedance diagram by drawing the line Ob' , intersecting the circle at b . The inverted quadrantal positions can be found in the same way by drawing the lines Oa' and Oc' . The mechanical Q -value is consequently given by the same expression as in the admittance case.

The point on the circle corresponding to the resonance of the mechanical branch in series with the electric branch is more easily found from the impedance diagram. At this frequency the reactive part of $Z'_{\text{mech}} + Z'_{\text{el}}$ is zero and the second term in the impedance expression will have maximum magnitude, i. e. the corresponding point on the circle will be d . This point can then be found in the admittance diagram by drawing the line Od' in Fig. 5.

Since the coupling constant can be expressed by the ratio of the resonance frequency of the mechanical branch to the resonance frequency of the mechanical and electric branches in series, we have found a method of evaluating this constant.

We obtain: $k \approx \sqrt{1 - (f_a/f_b)^2}$

valid for both the admittance and the impedance diagram.

As before, we can find loci for the various energy conditions. The ordinate is obviously the locus for the points of zero supplied electric energy. Similarly, a line representing the points in the plane where no energy is absorbed by the electric branch can be evaluated. This evaluation is carried out by BRAGSTAD and SKANCKE [7, p. 46] and we will confine ourselves to giving the method of constructing the line.

The two tangents to the circle from the origin O are constructed, and the line $m-m$ is drawn through the points of contact. The line OT is halved, and a perpendicular $n-n$ is erected at the midpoint. This line represents the points in the plane where no energy is dissipated in the coil.

The line for zero absorbed energy in the mechanical branch must obviously go through the intersection point S between the supplied energy line

and the electric loss line. It must also go through the point o , since at that point no energy is supplied to the mechanic branch.

Still referring to the work by BRAGSTAD and SKANCKE, it can be proved that a linear scale for the electro-mechanical conversion efficiency may be constructed. Drawing the line $h-h$ intersecting the lines $n-n$ and $g-g$, we can find the efficiency at any point on the circle by drawing a line from that point through S until intersection with $h-h$. The point of 100% efficiency is the intersection point between $h-h$ and $n-n$, while the zero point on the scale is the intersection point between $h-h$ and $g-g$. The maximum efficiency occurs at the resonance point b on the circle, something which is expected and which can be proved analytically.

The efficiencies read on the scale give the proportion of the supplied electric energy which is converted into vibrational energy. How this energy is divided between the internal losses occurring in the rod and useful radiated energy may be found by considering the connection between the resistance R' in Fig. 4c and the diameter of the admittance or impedance circle. If the rod is vibrating in air, the radiation losses are negligible and the resistance, which may be denoted by R'_a , is almost entirely due to inner losses. Submerging the rod in water or another medium with small acoustic mobility will increase the resistance in the network by an amount R'_w . The mechano-acoustic efficiency can then be written as:

$$\eta_{m-a} = \frac{R'_w}{R'_w + R'_a}.$$

In the admittance diagram, the diameter of the circle in air is given by $D_a = 1/R'_a$, and of that in the water by $D_w = 1/(R'_a + R'_w)$, so that the efficiency is quite simply given by:

$$\eta_{m-a} = \frac{D_a - D_w}{D_a}.$$

In the impedance diagram $D_a = |Z'_{\text{el}}|^2 / (R'_a + R'_{\text{el}})$ while $D_w = |Z'_{\text{el}}|^2 / (R'_a + R'_w + R'_{\text{el}})$, where R'_{el} is the equivalent series resistance of R'_{el} .

Evaluating, we obtain:

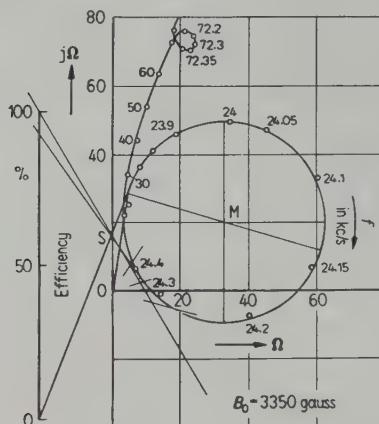
$$\eta_{m-a} = \frac{1 - (D_w/D_a)}{1 - [(D_w \sin \varphi) / Z'_{\text{el}}]}.$$

Since the second term in the denominator is very small in practical cases, the expression for the efficiency takes the same form as in the admittance case.

5. Example

Using the rod described in Section 2, we have measured the impedance diagram when the surrounding coil has 60 turns and the polarising field is adjusted to 3350 gauss. A Birmingham

Sound Reproducer frequency generator with incremental frequency scale has been used together with a General Radio Impedance Bridge, Type 916-AL and the diagram in Fig. 7 obtained. There are two circles in the diagram, representing the fundamental and third harmonic resonance.



NOISE LEVELS UNDERNEATH SOME CIVILIAN AIRCRAFT SHORTLY AFTER TAKE-OFF

by P. H. PARKIN and H. J. PURKIS

Building Research Station, Garston, Herts, England

Summary

The maximum sound pressure levels (in octave bands) have been measured underneath several types of civilian aircraft shortly after take-off. The height of the aircraft varied from 15-90 m; the results have been corrected to a standard height of 38 m.

Sommaire

On a mesuré, dans les bandes de fréquences d'une octave, les niveaux maxima de la pression sonore sous différents types d'avions civils, peu après leur décollage. L'altitude des avions variait de 15-90 m; on a ramené les résultats à une altitude uniforme de 38 m.

Zusammenfassung

Der maximale Schalldruckpegel (in Oktavbändern) unterhalb verschiedener Typen von Zivilluftfahrzeugen kurz nach dem Start wurde gemessen. Wegen der verschiedenen Flughöhe (15-90 m) wurden die Ergebnisse unter Annahme eines $1/r^2$ -Gesetzes auf eine Bezugshöhe von 38 m bezogen.

1. Introduction

As part of an investigation into the sound insulation of buildings at London Airport, measurements were made of the noise from civilian aircraft. Some of these measurements were of the sound pressure levels in octave bands under the aircraft shortly after take-off; as such results do not appear to have been published before (except for a few individual aeroplanes), and as they may have some general interest, a brief summary of them is given in this paper although, as will be obvious, they by no means constitute a complete investigation.

2. Technique

A Standard Telephones and Cables moving-coil microphone type 4021, protected by a double wind-shield, was used at a height of 1.5 m (5 feet) above the ground just off the end and on the centre-line of the main runway. As the aircraft took off they flew over the microphone at heights varying from 15 m (50 feet) to about 90 m (300 feet); their height when over the microphone was measured to the nearest 7.5 m (25 feet) using a simple theodolite. The noise was recorded on magnetic tape and subsequently analysed through octave filters (nominal pass-bands, 37-75 c/s, 75-150 c/s, etc.) into a logarithmic level recorder, corrected to read approximately mean rectified levels. The results given are derived from the maximum values reached by smooth lines drawn through the traces of the level recorder.

It was desirable to correct the results to a standard height of the aircraft above ground and although there were not sufficient measurements to be able to be precise about the accuracy, the following procedure appears reasonable. Of the four types of aircraft of which at least ten measurements were made, two types (the "Elizabethan" and the "Viscount") showed a mean variance (derived from the variances at particular heights for each type) of the order of 2 to 3 dB² in most of the octave bands, while the two other types (the "Convair" and the "DC-4") showed a mean variance three of four times as great. (It may be only a coincidence that the "Elizabethan" and the "Viscount" are comparatively new aircraft—first made in 1951—while the "Convair" and the "DC-4" are comparatively old—first made about 1947.) The variation of sound pressure level with height above ground of

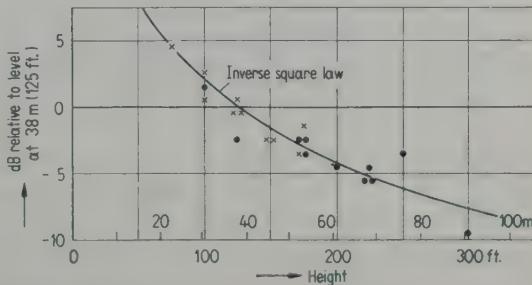


Fig. 1. Variation with height of sound pressure levels (300-600 c/s band), Elizabethan ● and Viscount Aircraft ×.

Table of results

Type	Engines		Maximum loaded weight in kg (lb.)	Number of aircraft measured	Means of maximum sound pressure levels in dB above 0.0002 dynes/cm ² ; (standard deviation); 38 m (125 ft.) height							
	Number	Total maximum horse-power at take-off			37...75 c/s	75...150 c/s	150...300 c/s	300...600 c/s	600...1200 c/s	1200...2400 c/s	2400...4800 c/s	4800...9600 c/s
PISTON ENGINES												
DC-3	2	2 400	11 441 (25 200)	5	99	106	104	101	100	98	93	80
Viking	2	3 380	15 422 (34 000)	1	101	103	102	103	104	103	100	94
Convair	2	4 800	18 972 (41 790)	15	98	108	104	102	101	99	93	82
Elizabethan (Ambassador)	2	5 200	23 600 (52 000)	11	95 (1.5) (2.0)	104 (4.0) (2.0)	99 (2.0)	94 (1.0)	92 (1.0)	86 (1.5)	81 (1.5)	74
DC-4	4	5 800	33 142 (73 000)	13	103 (2.5)	112 (3.5)	107 (3.5)	104 (4.0)	106 (2.5)	104 (2.5)	102 (2.5)	95
York	4	6 480	29 500 (65 000)	1	98	108	110	108	108	109	109	104
Argonaut (Canadair)	4	7 040	37 300 (82 300)	4	100	116	109	102	105	107	106	101
Hermes	4	8 400	39 100 (86 000)	3	103	112	106	106	109	104	103	99
DC-6	4	9 600	44 130 (97 200)	1	104	111	112	109	108	108	105	100
DC-6B	4	9 600	48 125 (106 000)	2	104	116	113	110	110	109	108	102
Constellation	4	10 000	48 580 (107 000)	7	105	113	110	110	112	109	108	99
Strato-Cruiser	4	14 000	76 195 (145 800)	2	111	117	114	108	107	108	106	97
PROPYJET ENGINES												
Viscount	4	5 600 H.P. plus 660 kg (1 460 lb.) static thrust	23 814 (52 500)	10	101 (2.0)	105 (3.5)	99 (1.5)	96 (1.0)	103 (1.5)	102 (1.5)	101 (2.5)	100
TURBO-JET ENGINES												
Comet	4	9 100 kg (20 000 lb.) static thrust	45 540 (105 000)	1	108	119	124	123	122	119	114	108

the "Elizabethan" and the "Viscount" agreed reasonably well in most of the octave bands with the inverse square law (e.g. Fig. 1) and it was therefore thought justified to correct all the results to a standard height, 38 m (125 feet). A further indication of the validity of this procedure was that the variances, now calculated assuming the inverse square law, were not generally changed.

3. Results

The results are given in the Table, which shows the maximum sound pressure level reached in each octave band during passage of the aircraft overhead shortly after take-off. All data are corrected to an aircraft height, at the overhead position, of 38 m (125 feet) assuming the inverse square law. Where measurements were made on more than one aircraft of the same type the fig-

ures given are the means of these corrected values. The standard deviations from these means, where calculated, are given to the nearest 0.5 dB in brackets. It should be mentioned that the maxima in the various octave bands do not necessarily occur at the same instant of time, due to the directionality of the source. The details of the aircraft are taken from "Jane's All the World's Aircraft", (Sampson Low, London).

Acknowledgments

This work forms part of the research programme of the Building Research Board of the Department of Scientific and Industrial Research and this paper is published by permission of the Director of Building Research.

Thanks are due to the Ministry of Civil Aviation for assistance at London Airport.

(Received 11th September, 1953.)

DE LA PRESSION DE RADIATION DANS LES FLUIDES

par J. MERCIER

Faculté des Sciences de l'Université de Bordeaux

Sommaire

Exposé des différentes manières de considérer la pression de radiation et de la calculer. Grandeur scalaire ou grandeur vectorielle ? L'auteur introduit le vecteur radiant égal au produit de la surpression par la vitesse de déplacement d'une tranche d'onde plane et calcule la pression de radiation sur un obstacle en considérant séparément les ondes incidentes et les ondes réfléchies. Il étend son calcul au cas des ondes planes progressant dans un milieu absorbant et à celui des ondes sphériques.

Zusammenfassung

Es werden die verschiedenen Möglichkeiten, den Schallstrahlungsdruck zu betrachten, zusammengestellt. Ist er ein Skalar oder ein Vektor? Der Autor führt einen „Strahlungsvektor“ ein, der gleich dem Produkt aus dem Überdruck und der Verschiebungsgeschwindigkeit einer „Scheibe“ aus einer ebenen Welle ist, und berechnet den Strahlungsdruck an einem Hindernis, indem er die einfallenden und reflektierten Wellen getrennt berücksichtigt. Die Berechnung wird auch auf den Fall einer ebenen Welle in einem absorbierenden Medium und auf Kugelwellen ausgedehnt.

Summary

An account of the different ways of considering radiation pressure and of calculating it. Is it a scalar or vectorial quantity? The author introduces a 'radiation vector' equal to the product of excess pressure and velocity of displacement of a section of a plane wave and calculates the pressure of radiation on an obstacle, considering incident and reflected waves separately. He extends his calculation to the case of progressive plane waves in an absorbent medium and to that of spherical waves.

Introduction

La notion de pression de radiation qui a été introduite par MAXWELL il y a trois quarts de siècle et qui s'est naturellement étendue à toutes les ondes de nature électro-magnétique s'étend également au domaine des ondes acoustiques. Cependant dans beaucoup de traités, on ne trouve rien à son sujet, et, dans les autres, cette pression est conçue différemment suivant les auteurs: en particulier, c'est sous l'angle vectoriel qu'on la trouve envisagée dans les travaux de L. BRILLOUIN [1], tandis qu'elle est essentiellement considérée comme une grandeur scalaire dans les études de Y. ROCARD [2]. D'autre part, les méthodes de calcul sont très variées et généralement on se contente de déterminer une valeur moyenne.

1. Critique d'un mode classique de calcul

Avant d'exposer notre propre conception et de proposer une solution particulièrement simple du problème, nous voudrions reproduire l'un des modes de calcul les plus répandu afin d'en faire la critique et d'en discuter la validité.

a) Soient donc des ondes planes progressives se propageant dans la direction des x croissants

et définies par le déplacement élémentaire X d'une tranche d'abscisse x au repos

$$X = X_0 \sin(\omega t - qx).$$

La vitesse de cette tranche a pour expression:

$$u = \partial X / \partial t = X_0 \omega \cos(\omega t - qx)$$

et la surpression Δp correspondante:

$$\Delta p = -P \partial X / \partial x = P X_0 q \cos(\omega t - qx),$$

P étant l'inverse du coefficient de compressibilité. Si la propagation se fait dans un gaz d'une façon adiabatique, P a pour expression γp , p étant la pression du gaz au repos et γ étant C_p/C_v . La surpression en un point d'abscisse x ne serait pas Δp , celle que nous venons de définir, car l'abscisse de la tranche considérée n'est plus x , mais $(x + X)$. Elle aurait pour expression:

$$\Delta p_1 = P X_0 q \cos[\omega t - q(x + X)]$$

soit en développant:

$$\Delta p_1 = P X_0 q [\cos(\omega t - qx) + qX \sin(\omega t - qx) + \dots]$$

ou encore:

$$\Delta p_1 = P X_0 q \cos(\omega t - qx) + \\ + P X_0^2 q^2 \sin^2(\omega t - qx) + \dots.$$

Le premier terme correspond à la surpression «normale». Le second serait relatif à la pression de radiation:

$$\Delta p_r = P X_0^2 q^2 \sin^2(\omega t - qx)$$

avec pour valeur moyenne $P X_0^2 q^2 / 2$.

Or le raisonnement peut s'appliquer à une tranche matérielle quelconque. Chaque tranche se trouverait être ainsi le siège d'une surpression moyenne $P X_0^2 q^2 / 2$. On peut donc alors considérer la pression de radiation comme existant tout au long de l'onde sans qu'il y ait lieu d'envisager spécialement un piston moteur vibrant ou une surface absorbante quelconque. De cette façon, il s'agirait d'une pression au sens ordinaire du mot qui s'exercerait aussi bien sur un obstacle que sur un élément de la paroi latérale d'un tuyau pourvu que cet élément soit lui-même animé de la vitesse u . Cette pression serait alors une grandeur scalaire et qui existerait dans tout volume élémentaire du milieu matériel au sein duquel se fait la propagation et qui se propagerait avec la vitesse V .

Mais, d'autre part, la densité d'énergie de la tranche d'abscisse x au repos a pour expression:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{1}{2} \overline{\Delta p}^2 / P \\ &= \frac{1}{2} \rho X_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - qx) + \\ &\quad + \frac{1}{2} P X_0^2 q^2 \cos^2(\omega t - qx), \\ U &= P X_0^2 q^2 \cos^2(\omega t - qx) \end{aligned}$$

car P est égal à ρV^2 , ρ étant la densité du fluide au repos et V étant la vitesse de propagation avec $\omega = qV$.

La valeur moyenne de U est $\frac{1}{2} P X_0^2 q^2$. D'où l'on conclut à l'égalité de la pression de radiation et de la densité d'énergie, d'accord en cela avec les résultats admis pour les ondes électromagnétiques.

b) Mais si les valeurs moyennes de la pression de radiation ainsi définie et de la densité de l'énergie du faisceau sont égales, il n'en est pas de même de leurs valeurs instantanées puisqu'elles sont régies respectivement par un \sin^2 et un \cos^2 . On ne peut vraiment pas dire qu'elles soient identiques.

c) D'ailleurs dans le cas général et en reprenant tous les calculs précédents, on obtient successivement:

$$X = f\left(t - \frac{x}{V}\right), \quad u = f'\left(t - \frac{x}{V}\right),$$

$$\Delta p = \frac{P}{V} f'\left(t - \frac{x}{V}\right),$$

$$\begin{aligned} \Delta p_1 &= \frac{P}{V} f'\left(t - \frac{x+X}{V}\right) \\ &= \frac{P}{V} f'\left(t - \frac{x}{V}\right) - \frac{P X}{V^2} f'' + \dots \end{aligned}$$

$$\text{d'où: } \Delta p_r = -\frac{P}{V^2} X f'' = -\rho f f''.$$

D'autre part, la densité énergétique a pour valeur:

$$U = \frac{1}{2} \rho f'^2 + \frac{1}{2} \frac{P^2}{V^2} f'^2 = \rho f'^2.$$

Pour qu'il y ait à chaque instant égalité entre les deux, il faudrait avoir

$$f'^2 + f f'' = 0,$$

ce qui ne peut avoir lieu que si f est de la forme $f = \kappa / t - x / V$, forme à laquelle il est impossible de rattacher une fonction sinusoïdale.

d) Cependant on étend le raisonnement aux ondes stationnaires et de la façon suivante. Le déplacement élémentaire ayant pour expression:

$$\begin{aligned} X &= X_0 \sin(\omega t + qx) - X_0 \sin(\omega t - qx) \\ &= 2 X_0 \sin qx \cos \omega t, \end{aligned}$$

la surpression a pour valeur:

$$\Delta p = -P \partial X / \partial x = -2 P X_0 q \cos qx \cos \omega t.$$

L'on a ensuite:

$$\begin{aligned} \Delta p_1 &= -2 P X_0 q \cos q(x+X) \cos \omega t, \\ \Delta p_1 &= -2 P X_0 q \cos qx \cos \omega t + \\ &\quad + 2 P X_0 X q^2 \sin qx \cos \omega t + \dots, \\ \Delta p_r &= 2 P X_0 X q^2 \sin qx \cos \omega t \\ &= 4 P X_0^2 q^2 \sin^2 qx \cos^2 \omega t. \end{aligned}$$

De telle sorte que sur un obstacle d'abscisse $x = 0$ et sur lequel il y aurait réflexion totale, la pression de radiation serait nulle. D'autre part, la densité énergétique a pour valeur:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \rho \cdot 4 X_0^2 \omega^2 \sin^2 qx \sin^2 \omega t + \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot 4 P X_0^2 q^2 \cos^2 qx \cos^2 \omega t, \end{aligned}$$

$$U = 2 P X_0^2 q^2 (\sin^2 qx \sin^2 \omega t + \cos^2 qx \cos^2 \omega t).$$

En aucun endroit, U et Δp_r ne peuvent être égales à tout moment et l'on en est réduit à dire que si l'on prend les valeurs moyennes à la fois vis-à-vis de x et de t , celles-ci sont les mêmes.

Il faudrait ici raisonner séparément sur les ondes incidentes et sur les ondes réfléchies mais de toutes façons, il apparaît que le raisonnement qui a permis d'obtenir Δp_r doit pécher par quelque côté.

On ne voit d'ailleurs pas pourquoi il faudrait toujours considérer des valeurs moyennes alors qu'évidemment la pression de radiation a une valeur instantanée.

e) Or, pour établir l'équation de propagation, l'on a considéré une tranche matérielle limitée au repos par deux plans d'abscisses x et $x+dx$. Les déplacements élémentaires étant X et $X+dX$ la tranche s'est dilatée de dX et la dilatation relative a pour valeur $\theta = \partial X / \partial x$, d'où la surpression $\Delta p = P \partial X / \partial x$.

Mais cette surpression est celle de la tranche dont l'abscisse au repos est x et dont l'abscisse *actuelle* est justement $x+X$. Il n'y a donc pas lieu d'y ajouter Δp_r . Chaque tranche matérielle du fluide qui oscille de part et d'autre de sa position d'équilibre est donc le siège à chaque instant de la surpression Δp de valeur moyenne nulle. Et un baromètre minuscule qui oscillerait avec une tranche et sans modifier l'état vibratoire du phénomène indiquerait donc une pression moyenne constante.

f) On pourrait peut-être au contraire se proposer de calculer la surpression en un point d'abscisse invariable x_1 et qui serait mesurable avec un baromètre fixe. La tranche matérielle du fluide qui, à un moment donné, est en x_1 a comme abscisse de repos x telle que $x+X=x_1$. D'où pour la surpression correspondante:

$$\Delta p = PX_0 q \cos[\omega t - q(x_1 - X)]$$

$$\Delta p = PX_0 q [\cos(\omega t - qx_1) - qX \sin(\omega t - qx_1) + \dots].$$

Mais on a d'autre part

$$X = X_0 \sin[\omega t - q(x_1 - X)]$$

$$= X_0 [\sin(\omega t - qx_1) + qX \cos(\omega t - qx_1) + \dots],$$

$$X \approx \frac{X_0 \sin(\omega t - qx_1)}{1 - qX_0 \cos(\omega t - qx_1)}$$

$$= X_0 \sin(\omega t - qx_1) [1 + qX_0 \cos(\omega t - qx_1) + \dots].$$

Et en portant dans Δp

$$\Delta p = PX_0 q [\cos(\omega t - qx_1) - qX_0 \sin^2(\omega t - qx_1) + \dots].$$

On trouve ainsi qu'en chaque point d'abscisse fixe il se produirait non pas une surpression, mais une dépression $PX_0^2 q^2 \sin^2(\omega t - qx_1)$. La pression en un point, du fait même du mécanisme de la propagation serait ainsi la résultante de toute une série de termes harmoniques d'ordres de plus en plus élevés et qui seraient donnés par les termes d'ordres supérieurs, que nous avons négligés dans nos développements.

2. Mode de calcul proposé par application des principes de la dynamique

Rappelons tout d'abord le mécanisme de la propagation d'un ébranlement dans un milieu matériel. Il n'est autre que celui que l'on constate le long d'un train de chemin de fer. L'énergie en se propageant passe alternativement de la forme potentielle à la forme cinétique. S'il s'agit d'un ressort, chaque spire joue à la fois le rôle de wagon et de ressort tampon. Or ici, aussi petite que nous supposons une tranche matérielle, les particules élémentaires sont en nombre tel que nous ne pouvons pratiquement que raisonner simultanément sur un nombre infini de wagons élémentaires. Si bien qu'à chaque instant, dans cette tranche, l'énergie cinétique est égale à l'énergie potentielle. Il s'agit bien toujours d'énergie qui se propage, mais par une course de relais, passant d'une particule à la suivante, sans rester solidaire de son support matériel comme dans un condensateur ordinaire d'énergie cinétique, dont l'énergie a pour expression $\frac{1}{2} mu^2$.

Or une telle énergie, comme toute énergie, est le produit de deux facteurs, un facteur de quantité et un facteur de qualité.

Ici ce sont la quantité de mouvement et la vitesse. En effet lorsque par exemple un corps de vitesse v_2 arrive sur un corps plus lent de vitesse v_1 , la quantité de mouvement $d\mu$ se conserve en passant du corps le plus rapide au corps le moins rapide et l'énergie mise en jeu $d\mu(v_2 - v_1)$ change de forme. Il en est alors de même que dans la décharge d'un condensateur électrique au cours de laquelle l'énergie mise en jeu a pour expression $dq(V_2 - V_1)$ et dont les facteurs sont la quantité d'électricité et le potentiel comme pour toute énergie électrique.

Si donc, il y a absorption d'ondes progressives par un obstacle disposé normalement, l'énergie absorbée par unité de surface et en un temps dt a pour valeur l'énergie comprise dans un cylindre de section unitaire et de longueur Vdt , c'est-à-dire $(UVdt)$, U étant la densité énergétique des ondes au contact même de l'obstacle et V leur vitesse de propagation. La variation de vitesse de cette énergie est alors V du fait de l'absorption et la quantité de mouvement correspondante est $d\mu = Udt$.

Mais d'autre part, d'après la loi fondamentale de la dynamique, la force exercée, c'est-à-dire ici la pression puisqu'il s'agit de l'unité de surface, est égale à $d\mu/dt$ c'est-à-dire à U , la densité d'énergie. Et cela, à chaque instant et quelle que soit la nature des ondes incidentes, ondes de choc ou ondes sinusoïdales et sans que l'on ait à

considérer des valeurs moyennes. Et quelles que soient aussi les valeurs de la pression et de la surpression pourvu que l'on prenne pour V la valeur de la vitesse de propagation à la hauteur de l'obstacle. On sait en effet que cette vitesse croît avec elles.

Dans le cas d'une réflexion totale, la variation de la quantité du mouvement étant doublée, la pression de radiation est elle-même doublée.

Il ressort évidemment de notre façon de raisonner que la pression de radiation devrait être considérée comme de nature essentiellement vectorielle au même titre qu'une quantité de mouvement et qu'elle n'existe et n'est à considérer qu'autant qu'il y a obstacle absorbant ou réfléchissant en tout ou en partie. La façon d'envisager la question diffère donc totalement de la façon exposée précédemment.

Si les ondes arrivent obliquement sur l'obstacle, il est également très facile de déterminer l'expression de la pression exercée. En effet (Fig. 1), la direction de propagation des ondes incidentes faisant un angle i avec la normale, la même quantité d'énergie au lieu de tomber en un temps dt sur une surface s tombe sur une surface S .

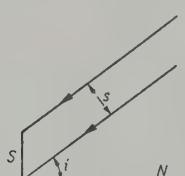


Fig. 1.

L'action sera donc diminuée dans le rapport s/S dans le sens de la propagation et dans le rapport $s/S \cdot \cos i$ c'est-à-dire $\cos i^2$ dans la direction de la normale. Autrement dit, la pression de radiation sera $U \cos^2 i$ s'il y a absorption, mais en même temps, il y aura une action tangentielle égale à $(U \cos i \cdot \sin i)$. S'il y a réflexion totale, les deux actions tangentielles dues respectivement aux ondes incidentes et réfléchies se neutralisent à l'opposé des actions normales qui s'ajoutent.

3. Calcul par le vecteur radiant

On sait que dans le cas d'ondes progressives, l'énergie qui en un temps dt traverse l'unité de surface normale à la direction de propagation a pour expression $\Delta p \cdot u \cdot dt$. C'est pourquoi il y a lieu de considérer un vecteur dirigé dans le sens de la propagation, d'intensité $\Delta p \cdot u$ et qu'on peut appeler vecteur radiant. C'est cette énergie $\Delta p \cdot u \cdot dt$ que reçoit en un temps dt et par unité de surface un obstacle placé normalement au fais-

ceau. S'il y a absorption la variation de quantité de mouvement est $\Delta p \cdot u \cdot dt/V$, d'où pour la pression de radiation l'expression $\Delta p \cdot u/V$.

Il est d'ailleurs facile de voir que dans le cas où nous nous sommes placés, cette expression mesure justement la densité d'énergie. On a en effet

$$\Delta p \cdot u = \frac{P}{V} f'^2 \quad \text{et} \quad U = \varrho f'^2 = \frac{P}{V^2} f'^2.$$

4. Remarques

Qu'il s'agisse de U ou de $\Delta p \cdot u/V$, ces grandeurs sont relatives à chaque instant à ce qui se passe au contact même de l'obstacle absorbant. Or une surface absorbante est mal définie. Une paroi absorbante est en effet constituée par des étoffes, des tentures, des tapis, des vêtements et d'une façon générale par des corps alvéolaires. L'absorption se fait en profondeur d'une façon progressive et le mécanisme rappelle celui de l'absorption des ondes lumineuses par du noir de fumée.

Aussi peut-on considérer comme nous l'avons fait en somme implicitement que les ondes arrivent sur une surface absorbante animée d'un mouvement identique à celui de la tranche matérielle au sein de laquelle se fait la propagation et adjacente à cette surface. Le travail $(\Delta p \cdot u \cdot dt)$ exercé par la surpression Δp en un temps dt se trouve recueilli par la surface frappée, toute l'énergie incidente se trouve ainsi absorbée et il n'y a pas réflexion.

S'il s'agit d'un piston oscillant émetteur d'énergie, le cas est exactement le même et le travail du piston a justement pour expression $(\Delta p \cdot u \cdot dt)$.

Dans un cas comme dans l'autre, qu'il s'agisse d'un phénomène d'absorption ou d'émission, la quantité de mouvement mise en jeu est $\Delta p \cdot u \cdot dt/V$ et la pression de radiation $\Delta p \cdot u/V$.

S'il s'agit d'ondes stationnaires résultant de la réflexion totale d'ondes incidentes arrivant sur un obstacle fixe normal à la direction de propagation, la densité d'énergie au contact de l'obstacle a pour expression $2 P X_0^2 q^2 \cos^2 \omega t$. On est à un nœud de vibrations et l'énergie se réduit à l'énergie de pression résultant de la somme de l'énergie de pression des ondes incidentes et de celle des ondes réfléchies qui sont égales. Les vitesses correspondantes étant de signes contraires et égales, la vitesse résultante est nulle ainsi que l'énergie cinétique.

L'expression $\Delta p \cdot u/V$ est donc nulle puisque u l'est. Mais si l'on considère séparément les ondes incidentes et les ondes réfléchies, on a pour chacune d'elles $\Delta p \cdot u/V = P X_0^2 q^2 \cos^2 \omega t$ car si pour les unes et les autres Δp a la même valeur et si les vitesses u sont égales et de signes con-

traires il en est de même des vitesses V puisque les ondes se dirigent en sens inverses.

On peut donc encore trouver dans le cas de la réflexion la valeur de la pression de radiation, à l'aide du vecteur radiant; mais à condition de considérer séparément les ondes incidentes et les ondes réfléchies et d'écrire:

$$\Delta p_r = \Delta p \left(\frac{u}{V} + \frac{-u}{-V} \right) = 2 \Delta p \frac{u}{V}.$$

Nous allons voir ci-dessous l'importance de ces considérations.

5. Ondes planes progressant dans un milieu absorbant

On a l'habitude de ne traiter que le cas relatif à des ondes se propageant sans amortissement. Or, il n'en est pas toujours ainsi et l'on peut même dire qu'il n'en est jamais exactement ainsi.

Considérons donc le cas d'un milieu absorbant. Il s'introduit une force résistante proportionnelle en première approximation au volume et à la vitesse; l'équation de propagation est modifiée et devient dans le cas le plus simple:

$$\varrho \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + a \frac{\partial X}{\partial t} = P \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}.$$

Dans un tuyau il faudrait tenir compte en outre de l'influence des parois, la modification serait plus profonde, il s'ensuivrait par exemple une augmentation apparente de ϱ mais la forme générale de l'équation resterait la même.

La solution que nous prendrons de forme sinusoïdale comporte alors un terme exponentiel d'amortissement:

$$X = X_0 e^{-\beta x + j(\omega t - qx)}.$$

Par substitution on a

$$-\varrho \omega^2 + a j \omega = P(\beta + jq)^2 = P(\beta^2 - q^2 + 2j\beta q)$$

$$\text{d'où } a\omega = 2P\beta q \quad \text{ou} \quad a = \frac{2P\beta q}{\omega} - \frac{2P\beta}{V}$$

et $\varrho\omega^2 = P(\beta^2 - q^2)$

$$\text{soit } \frac{\omega^2}{q^2} = \frac{P}{\varrho} \left(1 - \frac{\beta^2}{q^2} \right)$$

$$\text{d'où } \Gamma = \sqrt{\frac{P}{\varrho}} \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{q^2}} \approx \sqrt{\frac{P}{\varrho}} \left(1 - \frac{\beta^2}{2q} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{P}{\varrho}} \left(1 - \frac{\beta^2 \lambda^2}{8\pi^2} \right).$$

Comme on pouvait s'y attendre, la vitesse de propagation est diminuée. Mais d'autre part, d'autres modifications se produisent. La vitesse u des éléments matériels et la surpression ne sont

plus en phase, les densités des énergies cinétiques et potentielles ne sont plus égales et, en ce qui nous intéresse actuellement, l'énergie localisée en un point à un moment donné ne se propage pas en entier, une partie restant sur place du fait de l'absorption du milieu.

Et il s'ensuit que U et $\Delta p \cdot u/V$ ne sont plus ni égales ni même en phase. L'amplitude de U est supérieure à celle de l'expression $\Delta p \cdot u/V$.

Nous ne pouvons donc plus raisonner comme au paragraphe [2] pour obtenir la pression de radiation: C'est au vecteur radiant que nous aurons recours comme au paragraphe [3]. Et nous devrons en conclure que la pression de radiation exercée par un faisceau arrivant sur un obstacle qui l'absorbe est donné par l'expression $\Delta p \cdot u/V$. Et nous ajouterons que dans le cas particulier où le milieu n'est pas absorbant, cette expression mesure la quantité d'énergie au contact de l'obstacle et que par conséquent cette densité peut être elle-même prise comme mesure de la pression de radiation. Mais il ne s'agit pas là d'un fait général.

Dans le cas où il y a réflexion, nous devrons évidemment tenir compte des considérations du paragraphe [4] et considérer séparément la pression due aux ondes indicentes et celle due aux ondes réfléchies.

6. Ondes sphériques

Considérons maintenant le cas des ondes sphériques. Soit par exemple une sphère pulsante de rayon r_0 très petit. On pourra écrire pour le potentiel des vitesses:

$$\varphi = A \frac{r_0^2}{r} \sin(\omega t - qr).$$

D'où pour la vitesse élémentaire et la surpression:

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = A \frac{r_0^2}{r} \left[\frac{1}{r} \sin(\omega t - qr) + q \cos(\omega t - qr) \right]$$

$$= u_1 + u_2,$$

$$\Delta p = \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varrho A \frac{r_0^2}{r} \omega \cos(\omega t - qr).$$

A la surface de la sphère, l'amplitude de la vitesse est A . On a en fait deux ondes qui se conduisent différemment. Pour l'une d'elles, u_2 et Δp sont en phase et s'amortissent de la même façon en fonction de la distance au centre r .

L'expression $\Delta p \cdot u_2/V$ conserve un signe constant et serait égale à la densité d'énergie si cette onde était unique. L'amortissement ici n'est pas dû à une absorption du milieu, mais au fait que le volume intéressé pour une même énergie est d'autant plus grand que l'on s'éloigne du centre car l'on a en effet:

$$4\pi r^2 \Delta p \cdot u_2 = 4\pi \varrho A^2 r_0^4 \omega q \cos^2(\omega t - qr) \\ = K \cos^2(\omega t - qr).$$

La valeur moyenne de l'énergie qui passe ainsi à travers une sphère quelconque et par unité de temps est constante et égale à $K/2$. Pour l'autre, u_1 et Δp sont en quadrature et si Δp s'amortit comme $1/r$ avec la distance, u_1 le fait comme $1/r^2$. Les conclusions précédentes ne sont plus valables. On a comme un certain volume vibrant autour de la source puisqu'en un point quelconque $\Delta p \cdot u_2$ a une valeur moyenne nulle, l'énergie oscillant de part et d'autre du point. On a comme un système à ondes pseudostationnaires dont tous les points ne vibreraient pas en phase.

Les conclusions relatives à la première onde considérée ne s'appliquent pas à l'ensemble des deux ondes. Le vecteur radiant en un point ne sera pas toujours dirigé dans le même sens et la densité d'énergie ne se mesurera pas par l'expression $\Delta p \cdot u/V$.

Et c'est cette dernière qu'il faudra encore considérer pour avoir la pression de radiation

$$p_r = \frac{\Delta p \cdot u}{V} = \varrho A^2 \frac{r_0^4}{r^2} q \cos(\omega t - qr) \times \\ \times \left[\frac{1}{r} \sin(\omega t - qr) + q \cos(\omega t - qr) \right].$$

La valeur moyenne de cette pression est

$$\frac{1}{2} \varrho A^2 \frac{r_0^4}{r^2} q^2$$

sur un obstacle absorbant à la distance r . Elle est égale à deux fois la valeur moyenne de la densité de l'énergie potentielle. Cette valeur varie comme $1/r^2$.

A très grande distance, on pourra considérer p_r comme régie par un \cos^2 en fonction du temps.

Dans le cas de la réflexion totale, p_r est multipliée par 2. Sinon, la pression due aux ondes réfléchies s'obtiendra en multipliant celle due aux ondes incidentes par le coefficient de réflexion.

Quant à la pression de radiation qui s'exerce sur la sphère pulsante elle a pour valeur moyenne $\frac{1}{2} \varrho A^2 r_0^2 q^2$, mais sa valeur instantanée peut être considérable et atteindre la valeur $\frac{1}{2} \varrho A^2 r_0 q$.

C'est dire que la pression exercée sur un obstacle placé au foyer d'ondes sphériques convergentes peut être très grande.

(Reçu le 7 décembre 1953.)

Bibliographie

- [1] BRILLOUIN, L., Sur les tensions de radiation. Ann. Phys., Paris **4** [1925], 528-586.
Les tensions de radiation, leur interprétation en mécanique classique et en relativité. J. Phys. Radium **6** [1925], 337-353.
Les pressions et tensions de radiation. Rev. Acoust. **5** [1936], 99-111. «Les tenseurs en mécanique et en élasticité». Masson éd., Paris, 1938.
- [2] ROCARD, Y., La pression de radiation en acoustique. Rev. sci. **84** [1946], 329-333.
«Dynamique générale des vibrations». Masson éd., Paris, 1949.
- On pourra également consulter les publications suivantes:
- [3] BAUER, B., Radiation pressure. J. acoust. Soc. Amer. **19** [1947], 504.
- [4] BORGNISS, F. E., Acoustic radiation pressure of plane compressional waves at oblique incidence. J. acoust. Soc. Amer. **24** [1952], 468.
- [5] FUBINI-GHIRON, E., La tension de radiation acoustique et les ondes de grande amplitude. Rev. Acoust. **6** [1937], 118-127.
- [6] FOKKER, A. D., Les tensions de radiation acoustique. Rev. Acoust. **7** [1938], 73.
- [7] HERTZ, G. et MENDE, H., Der Schallstrahlungsdruck in Flüssigkeiten. Z. Phys. **114** [1939], 354-367.
- [8] LUCAS, R., Sur les pressions de radiation des ondes sphériques. C. R. Acad. Sci., Paris **230** [1950], 2004-06.
- [9] MENDOUSSE, P., On the theory of acoustic radiation pressure. Proc. Amer. Acad. Arts Sci. **78** [1950], 135-184.
- [10] MERCIER, J., La pression de radiation en acoustique. C. R. Acad. Sci. Paris **232** [1951], 2181-2183; J. Phys. Radium **12** [1951], 38 S-40 S.
- [11] RICHTER, G., Zur Frage des Schallstrahlungsdruckes. Z. Phys. **115** [1940], 97-108.
- [12] SCHAEFER, C., Zur Theorie des Schallstrahlungsdruckes. Ann. Phys. Lpz. **35** [1939], 473-491.

THE ACCEPTABILITY OF ARTIFICIAL ECHOES WITH REVERBERANT SPEECH AND MUSIC

by A. F. B. NICKSON, R. W. MUNCEY and P. DUBOUT

Division of Building Research, Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization, Australia.

Summary

Groups of subjects seated in a room of short reverberation time (0.15 s) assessed whether or not a single artificial echo added to speech or music was disturbing. The artificial echo varied 50 dB in intensity level and up to 600 ms in delay. The acceptable-echo-level/delay relation is shown to consist of three parts; the initial period when the Haas effect is prominent, an interim period determined by the decay time of the sound type, and a final period when the level of acceptable echo scarcely changes with the delay, being determined by the dynamic range of the programme material.

Sommaire

Des groupes de sujets assis dans une salle ayant une faible durée de réverbération (0,15 s), ont été invités à dire si un écho artificiel simple ajouté à de la parole ou de la musique était ou non gênant. Cet écho artificiel avait un niveau d'intensité variant jusqu'à 50 dB, et son retard atteignait 600 ms. On montre que la relation entre l'intensité d'écho admissible et le retard, se compose de trois portions: une portion initiale, où l'effet Haas est prédominant, une portion intermédiaire déterminée par la durée d'affaiblissement du son employé, et une portion finale où le niveau de l'écho admissible varie à peine avec le retard, étant déterminé par le champ du dispositif de reproduction.

Zusammenfassung

Versuchspersonen, die in einem Raum mit kurzer Nachhallzeit (0,15 s) saßen, stellten fest, ob ein einzelnes künstliches Echo, das zu Sprache oder Musik hinzugefügt wurde, störend wirkte oder nicht. Das künstliche Echo wurde 50 dB in der Schallintensität und bis zu 600 ms in der Verzögerungszeit geändert. Es wird gezeigt, daß die Beziehung zwischen der zulässigen Echointensität und der Verzögerungszeit aus drei Bereichen besteht: dem Anfangsbereich, in welchem der Haas-Effekt vorherrscht, einem Zwischenbereich, der durch die Nachhallzeit der Schallart bestimmt wird, und einem Endbereich, in welchem die zulässige Echointensität sich kaum mit der Verzögerungszeit ändert, und der durch den Dynamikbereich der Wiedergabe bestimmt wird.

1. Introduction

All sounds as commonly heard consist of an initial direct sound followed by echoes. Workers [1], [2] have studied the acceptability of artificially added echoes; the results can be expressed graphically as the echo level intensity at various delay intervals that are acceptable to a given percentage of the audience at the test. Presented in this form three parts are apparent: the first occupies the initial period to about 50 ms, within which period an echo from as loud as the original sound to as much as 10 dB greater is acceptable, the second occupies the next few hundred ms when the tolerability of the echo decreases almost linearly with increasing delay, and the third when the level of acceptable echo scarcely changes with the delay period.

This report is concerned with listening experiments using the previous technique of listeners seated in a comparatively dead room [2] but the sounds used in this study have been recorded in reverberant spaces so that in addition to the

artificial echoes there are natural echoes in the sound. The results lead to a hypothesis which explains them in terms of the characteristics of the original sound.

2. Experimental technique

The equipment used in this work is essentially that used previously [2]. The endless tape system is unchanged but the amplifiers and the control system have been reconstructed to provide increased operating facility and somewhat improved sound crispness and quality. A new room for listening has been constructed; it measures about 6 m × 5 m × 3 m and has a reverberation time/frequency characteristic as shown in Fig. 1, room A. Two loudspeakers placed side by side were used for the initial and echo sounds and the number of listeners who answered the question "are you disturbed by the echo?" in the affirmative was recorded electrically as before.

Several sound types were used; three were one excerpt of 20 s length read at 5 syllables per

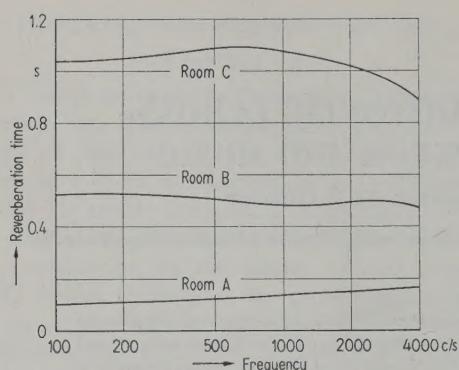


Fig. 1. Room reverberation times.

second in the three rooms numbered A, B and C in Fig. 1, the fourth was string music recorded from a quartette playing outdoors, the fifth this string music played in room C and recorded from a microphone, and a sixth was the speech recorded in room A re-recorded concurrently with random noise onto the endless tape. As results show, it is unlikely that the actual words and music are significant; they are therefore not reported.

The audience at each listening test was normally ten; occasionally the whole ten were not available and the corresponding adjustment was made in the evaluation of the results. The eight persons of the acoustics group of this Division were included in the ten and, from the previous paper, it can be expected that their results will be representative generally.

The sound level used was the same as in the earlier test, being about 80 dB (peak) above 0.0002 dynes/cm², as desired by the subjects for comfortable listening. In addition, for the speech from room A a further test was conducted at a level 20 dB less to find the effect of intensity on the results.

Finally, the overall level of the non-echoed sound of each type was recorded by a Brüel and Kjær type 2301 high-speed level recorder adjusted to have an instrument decay equivalent to a reverberation time of 0.14 s, being close to that of the ear [3]. The rate of sound decay after each syllable of speech or music has been termed the programme reverberation time.

3. Results

The results obtained from the various sound types are shown in Figs. 2 and 3. Initially a plot was made of the percentage disturbed by the echo against the amount of the delay and from these plots the echo level/delay relation acceptable to 20 and 50 percent of listeners was determined. The precision of the results decreased

with increasing reverberation time on the original sound and was greater for speech than for music. The standard error for a single observation for speech recorded in room B was about 12 per cent for any particular level/delay combination. Measurements were repeated to reduce the error of the mean to about 5 per cent for speech and 10 per cent for music.

The records of the sound level were analysed to measure the level difference between the peaks and the troughs (roughly within one reverberation time) and the minimum noise level and also the programme reverberation time measured as each syllable or sentence of speech or music died away. These are recorded in Table I together with details of the equivalent reverberation time (obtained as a tangent to the echo level/delay time curve), and the level below which echo acceptability is independent of delay taken from Figs. 2 and 3.

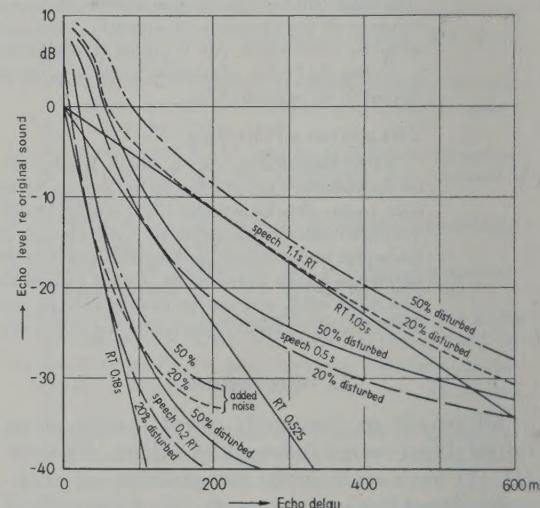


Fig. 2. Acceptable echo levels for speech.

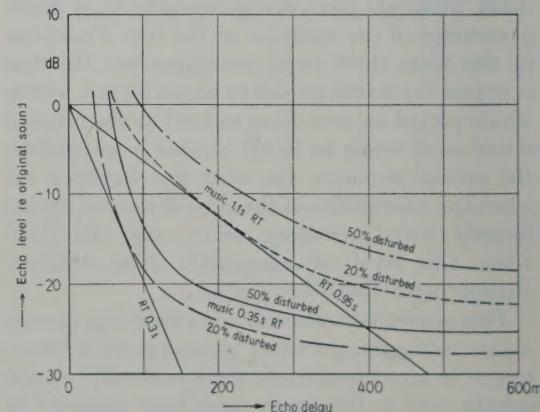


Fig. 3. Acceptable echo levels for string music.

As might be expected, the result of the test at a level 20 dB below that normally used gave results which did not differ essentially from those at the usual level.

Table I

Sound type	Level records			Listening test results (20% disturbed)	
	Pro- gramme reverbera- tion time	Ratio between peaks and troughs	Ratio between peaks and tape noise	Equi- valent reverbera- tion time	Level for echo indepen- dent of delay
	s	dB	dB	s	dB
Speech room A	0.20	42	42	0.18	-45
Speech room A with added noise	0.20	28	28	0.18	-35
Speech room B	0.5	35	35	0.52	-30
Speech room C	1.1	32	32	1.05	-30
String music outdoors	0.35	23	38	0.3	-25
String music room C	1.1	20	32	0.95	-20

4. Discussion

It is quite apparent that the nature of the original sound has a profound effect on the results obtained in listening tests such as described here. The agreement of the programme reverberation times and maximum intensity changes, measured from level records of the sound, with the equivalent reverberation times and minimum echoes corresponding to the more critical section of listeners (20 percent disturbed) is quite striking. In fact it appears almost certain that it is the former two parameters that determine the shape of the curve after the initial period when the "HAAS" effect operates i. e. when the ear is capable of accepting echoes greater than those given by a linear reverberation decay. The tentative criterion for auditoria proposed by BOLT and DOAK [4] follows this idea.

As a further check on this hypothesis the recorded sounds used in the previous study [2] have been examined and the results are compared in Table II. Again the agreement is very good with the exception of the slow music. For all cases the ratio between peaks and troughs of the sound was measured also after passing through a tuned circuit: for the slow string music the ratio was then about 28 dB and for the slow organ music 20 dB, whereas it was practically

unchanged for the other sounds. This suggests that the frequency sensitivity of the ear is being used to detect low level echoes in slow music. Further, many of the subjects complained of the difficulty of detecting echoes with slow music and about 30 percent reported being disturbed by an echo even when the sound was presented without echo. These results would appear to be less reliable than the others.

An independent confirmation is supplied by MEYER and SCHODDER [5]. Study of their Fig. 8 shows that for echoes to pass unnoticed by the more critical section of an audience they must fall close to the level expected from a linear decay at a rate corresponding to the reverberation time of the listening room.

Table II

Sound type	Level records		Listening test	
	Pro- gramme reverbera- tion time	Ratio between peaks and troughs	Equi- valent reverbera- tion time	Level for echo indepen- dent of delay
	s	dB	s	dB
Speech fast	0.20	40	0.18	-35
slow	0.28	27	0.28	-34
String music fast	0.35	30	0.41	-32
slow	0.4	18	0.75	-30
Organ music fast	0.6	33	0.76	-31
slow	0.8	8	0.65	-30

The results from listening in a dead space to a sound recorded in a live space are qualitatively comparable with those previously reported for listening in a live space to material recorded in a dead space. For example, replotting HAAS' Fig. 4 in the form used here suggests (from the slope of the tangent) an equivalent reverberation time of about 0.8 s. In both instances then, the tolerance for echoes is largely defined by the masking echoes introduced by the room. This leads to the conclusion that, apart from short delay echoes, the listening tests are only a complex method of measuring phenomena connected with reverberation.

5. Conclusions

The relation between acceptable echo level and echo delay in artificial echo listening tests depends in the middle period on the natural echoes present in the recording room, and in the long delay period on the difference in sound level

between the loud and quiet portions of the programme material. Any attempt to translate results of listening tests into criteria for examination of pulse measurements from rooms would therefore produce merely a reflection of the test conditions and not be universally accurate.

(Received 15th December, 1953)

References

[1] HAAS, H., Über den Einfluß eines Einfachechos auf die Hörsamkeit von Sprache. *Acustica* **1** [1951], 49-58.

[2] MUNCEY, R. W., NICKSON, A. F. B. and DUBOUT, P., The acceptability of speech and music with a single artificial echo. *Acustica* **3** [1953], 168-173.
 [3] STEVENS, S. S. and DAVIS, H., Hearing; its psychology and physiology. Wiley & Sons, New York 1948; 3rd imp., p. 222.
 [4] BOLT, R. H. and DOAK, P. E., A tentative criterion for the short-term transient response of auditoriums. *J. acoust. Soc. Amer.* **22** [1950], 507-509.
 [5] MEYER, E. and SCHODDER, G. R., Über den Einfluß von Schallrückwürfen auf Richtungslokalisation und Lautstärke bei Sprache. *Nachr. Wiss. Ges. Göttingen* **6** [1952], 31-42.

LETTER TO THE EDITOR

concerning the article by

"M.-L. EXNER and W. HAMPE, Experimental determination of the damping of pulsating air bubbles in water" (*Acustica* **3** [1953], 67)

by M. STRASBERG

David Taylor Model Basin, Washington 7, D.C., USA.

M.-L. EXNER and W. HAMPE, in the above mentioned article, report the existence of "anomalous" bubbles. This letter discusses a possible explanation of the phenomenon.

An anomalous bubble is characterized by the following acoustic behaviour:

1. The measured resonant frequency does not agree with the frequency calculated from the measured diameter of the bubble using MINNAERT's relation between frequency and diameter.
2. The damping at the measured resonant frequency is abnormally low.
3. The measured resonant frequency may suddenly change.
4. The bubble usually has a dust particle on its surface.

The article referred to examines as possible explanations of this behaviour the influence of the dust particles on the mass reactance of the water, and on the surface tension of the bubble surface, but concludes that neither of these explanations is valid. As an alternate tentative explanation, I suggest that the behaviour may be associated with surface oscillations of the bubble.

Surface oscillations of a bubble are usually of such low frequency that they are neglected in acoustics. However, for very small bubbles, the frequency of surface oscillation may be of the same order as the frequency of ordinary volume pulsation. The circular frequency ω_n of the surface oscillation of a bubble of gas in a liquid is given by LAMB [3] as

$$\omega_n^2 = (n^2 - 1)(n + 2) T / \rho R^3,$$

where n is the order of the surface harmonic describing the shape of the oscillating surface ($n=2$ is the lowest order possible for a surface oscillation), T is the surface tension, ρ is the liquid density and R the mean radius of the bubble. For comparison, the frequency ω_0 of volume pulsation of a bubble is given by MINNAERT [2] as

$$\omega_0^2 = 3\gamma P / \rho R^2,$$

where P is the mean pressure and γ the ratio of specific heats of the gas inside the bubble. The ratio of the surface-oscillation frequency to volume-pulsation frequency is thus

$$(\omega_n / \omega_0)^2 = (n^2 - 1)(n + 2) T / 3\gamma PR^3.$$

It is apparent that as the radius R becomes small the surface-oscillation frequency approaches, and may indeed exceed, the volume-pulsation frequency.

As an example, consider one specific bubble described by EXNER and HAMPE which, at a radius of 5.5×10^{-3} cm, had a resonant frequency which suddenly changed from about 81 kc/s to 97 kc/s. These frequencies correspond approximately to the ninth- and tenth-order surface modes. The sudden change in observed frequency could be a result of a change in excitation from one mode to another.

The reduced damping of these anomalous bubbles may be due to the smaller radiation damping associated with surface oscillation. The damping due to heat conduction would also be smaller; in fact, probably the only important source of damping is viscosity.

The excitation of these surface oscillations by a uniform sound field may require some non-symmetry. Non-symmetry may be supplied by the dust particles attached to the anomalous bubbles.

A test of this explanation of the anomalous bubbles could be performed using the apparatus of EXNER and HAMPE, by determining whether a single anomalous bubble could be excited at a series of frequencies distributed according to LAMB's formula given above.

(Received 2nd May, 1954)

[The English editor comments that he has observed flatlings on the sides of the large cavities formed at impact of a sphere on a water surface which he ascribes to higher modes of these vibrations given by LAMB's formula. KORNFELD and Suvorov (J. appl. Phys. **5** [1944], 495) observed similar effects on small cavitation bubbles. Presumably these higher surface modes involving no change in volume are inefficient radiators of sound.]

References

[1] EXNER, M.-L. and HAMPE, W., *Acustica* **3** [1953], 67.
 [2] MINNAERT, M., *Phil. Mag.* **16** [1933], 235.
 [3] LAMB, H., "Hydrodynamics", Dover Publications, New York 1933, p. 475.